Mathematik
Aufnahmeprüfung 2016

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Vereinfache so weit wie möglich: $-5v - \left[(-3)\cdot(-6v) + \frac{6-9v}{3}\right] = ?$

(b) Vereinfache so weit wie möglich: $\frac{(5a)^2 + 8a^2}{9ab^2} : \frac{3}{ab} = ?$

(a)
$$\begin{aligned} -5v - \left[(-3)\cdot(-6v) + \frac{6-9v}{3}\right] &= -5v - [18v + 2 - 3v] \\ &= -5v - 15v - 2 \qquad \underline{\underline{-20v - 2}} \end{aligned}$$

(b)
$$\frac{(5a)^2 + 8a^2}{9ab^2} : \frac{3}{ab} = \frac{25a^2 + 8a^2}{9ab^2} \cdot \frac{ab}{3} = \frac{33a^2}{9ab^2} \cdot \frac{ab}{3} = \underline{\underline{\frac{11a^2}{9b}}}$$

Aufgabe 2

(a) Löse die Gleichung nach x auf:

$$\frac{3x}{7} + \frac{x}{5} = 2 - \frac{5-7x}{14}$$

(b) Das Resultat der folgenden Rechnung soll so angegeben werden, dass nur natürliche Zahlen vorkommen. Die Anzahl Minuten soll kleiner als 60 und die Anzahl Sekunden ebenfalls kleiner als 60 sein.

$$11233\,\mathrm{s} + \frac{158}{45}\,\mathrm{h} + 886.35\,\mathrm{min} \quad = \quad \underline{\qquad}\,\mathrm{h} \quad \underline{\qquad}\,\mathrm{min} \quad \underline{\qquad}\,\mathrm{s}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{7} + \frac{x}{5} &= 2 - \frac{5-7x}{14} && \mid \cdot 70 \\
10 \cdot 3x + 14 \cdot x &= 140 - 5 \cdot (5 - 7x) && \mid \text{TU} \\
44x &= 140 - 25 + 35x && \mid -35x \\
9x &= 115 && \mid :9 \\
x &= \underline{\underline{\frac{115}{9}}}
\end{aligned}$$

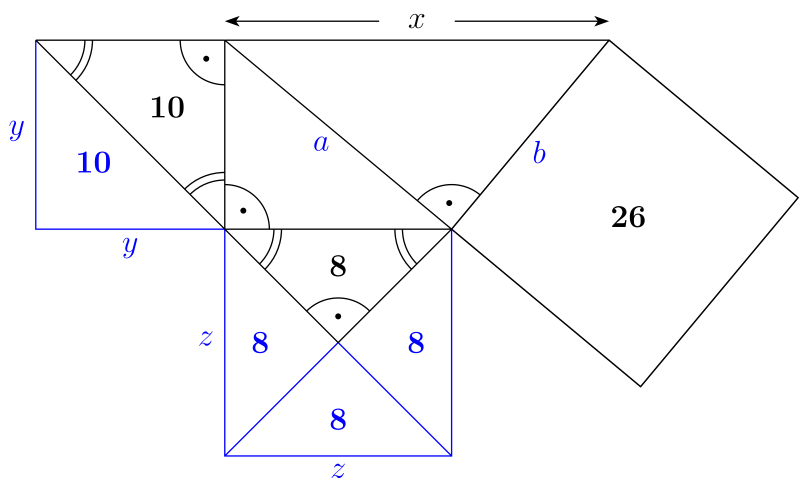
(b)

$$\begin{aligned}
11233\,\mathrm{s} + \frac{158}{45}\,\mathrm{h} + 886.35\,\mathrm{min} &= 11233\,\mathrm{s} + 12640\,\mathrm{s} + 53181\,\mathrm{s} \\
&= 77054\,\mathrm{s} \\
&= 21 \cdot 3600\,\mathrm{s} + 24 \cdot 60\,\mathrm{s} + 14\,\mathrm{s} \\
&= \underline{\underline{21\,\mathrm{h} \quad 24\,\mathrm{min} \quad 14\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die untenstehende Figur ist zusammengesetzt aus vier rechtwinkligen Dreiecken und einem Quadrat. Die angegebenen Zahlen bedeuten die Flächeninhalte der Figuren, in denen sie sich befinden. Beachte, dass die beiden Dreiecke mit Inhalt 10 und 8 gleichschenklig sind!

Berechne die Länge x.



Mit den Seitenlängen der Quadrate y und z wie oben im Bild gilt:

$y^2 = 2 \cdot 10 = 20$ und $z^2 = 4 \cdot 8 = 32$. (Damit ist $y = \sqrt{20} \approx 4.47$ und $z = \sqrt{32} \approx 5.66$).

Daraus folgt mit dem Satz von Pythagoras $a^2 = x^2 + y^2 = 20 + 32 = 52$.

Ausserdem gilt $b^2 = 26$ (und damit $b = \sqrt{26} \approx 5.10$).

Damit ist mit dem Satz von Pythagoras $x^2 = a^2 + b^2 = 52 + 26 = 78$.

Daraus folgt $x = \sqrt{78} \approx \underline{\underline{8.83}}$.

Aufgabe 4

Notiere jede Zahl zwischen 100 und 200, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

- Sie ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
- Sie ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar.

Weil eine solche Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist sie auch durch 6 teilbar.

Daher ist sie von der Form $6x$. Dabei darf aber der Faktor x selbst nicht durch 2 teilbar sein (das würde die erste Eigenschaft verletzen). Ebenso darf x nicht durch 3 teilbar sein (das würde die zweite Eigenschaft verletzen).

Ausserdem muss $6x$ zwischen 100 und 200 liegt. Daher muss x zwischen $\frac{100}{6} \approx 16.7$ und $\frac{200}{6} \approx 33.3$ liegen.

Zusammenfassend: x darf nicht durch 2 oder 3 teilbar sind, und muss zwischen 17 und 33 liegt.

Von den Zahlen zwischen 17 und 33 sind also all jene zu streichen, die durch 2 oder durch 3 teilbar sind:

$17 \quad \cancel{18} \quad 19 \quad \cancel{20} \quad \cancel{21} \quad \cancel{22} \quad 23 \quad \cancel{24} \quad 25 \quad \cancel{26} \quad \cancel{27} \quad \cancel{28} \quad 29 \quad \cancel{30} \quad 31 \quad \cancel{32} \quad \cancel{33}$

Für x bleiben die 6 Möglichkeiten: 17, 19, 23, 25, 29 oder 31.

Wir erhalten somit die 6 Zahlen $6 \cdot 17 = \underline{\underline{102}}$, $6 \cdot 19 = \underline{\underline{114}}$, $6 \cdot 23 = \underline{\underline{138}}$, $6 \cdot 25 = \underline{\underline{150}}$, $6 \cdot 29 = \underline{\underline{174}}$ und $6 \cdot 31 = \underline{\underline{186}}$.

Aufgabe 5

Zu Beginn der Woche bietet die Boutique ZACK ein T-Shirt zum Preis von 30 Fr. an, während das Kleidergeschäft HUGO dasselbe T-Shirt zum Preis von 32 Fr. verkauft.

Der Inhaber von ZACK erhöht am Freitag den Preis um 10%. Die Geschäftsleiterin von HUGO gewährt am selben Tag einen Rabatt von 15% auf alle ihre Produkte.

Olga kauft am Freitag mehrere T-Shirts bei ZACK.

Wie viel Prozent des Geldes, das Olga für den Kauf ausgegeben hat, hätte sie gespart, wenn sie diese T-Shirts bei HUGO gekauft hätte?

Der Preis eines T-Shirts am Freitag in der Boutique ZACK beträgt $1.1 \cdot 30$ Fr $= 33$ Fr.

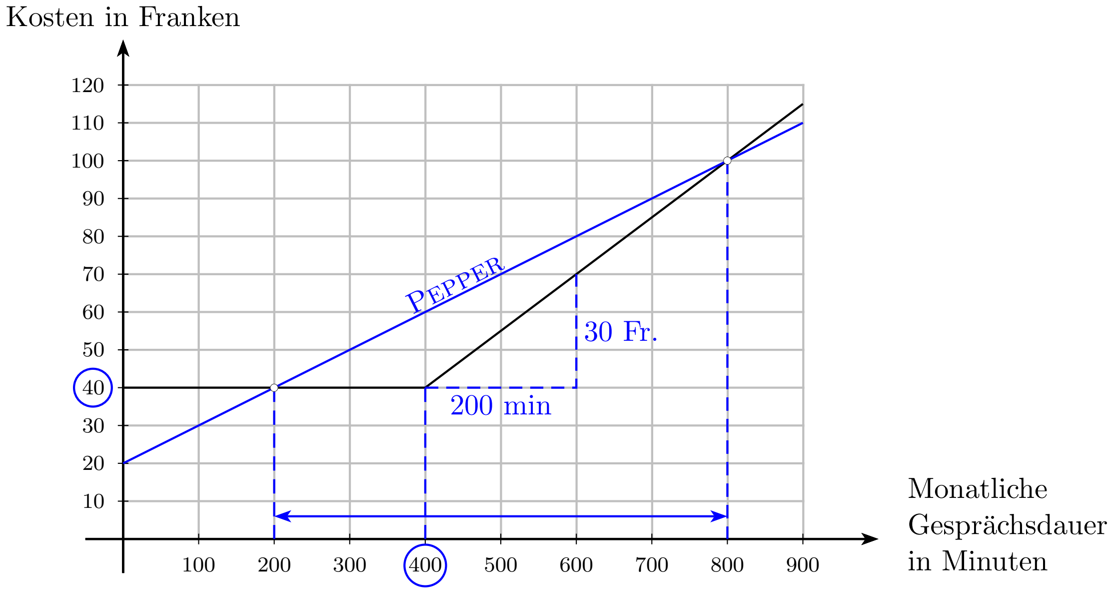
Der Preis eines T-Shirts am Freitag im Kleidergeschäft HUGO ist $0.85 \cdot 32$ Fr $= 27.20$ Fr.

Pro T-Shirt hätte Olga also 33 Fr $-$ 27.20 Fr. $=$ 5.80 Fr. gespart.

Da sie pro T-Shirt 33 Fr. zahlen musste, entspricht dies $\frac{5.80}{33} \approx 0.1758 = \underline{\underline{17.58\%}}$.

Aufgabe 6

Pro Monat zahlt man beim Telekommunikationsunternehmen Moonlight eine Grundgebühr von a Franken und kann dann b Minuten lang gratis telefonieren. Danach kostet jede weitere Minute c Franken. In der Graphik unten sind die monatlichen Kosten in Abhängigkeit der monatlichen Gesprächsdauer dargestellt:



(a) Bestimme anhand des Diagramms die Werte von a, b und c.

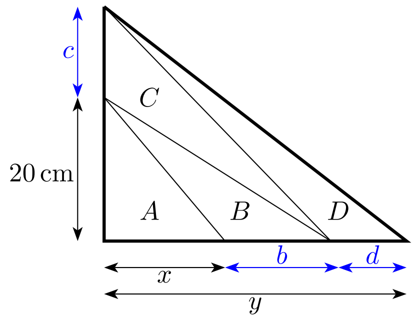
$$a = 40, \qquad b = 400, \qquad c = \frac{30}{200} = 0.15$$

(b) Beim Konkurrenten Pepper zahlt man pro Monat eine Grundgebühr von 20 Franken und für jede Gesprächsminute 10 Rappen (d.h. es sind keine Gratisminuten in der Grundgebühr enthalten). Stelle die monatlichen Kosten in Abhängigkeit der monatlichen Gesprächsdauer im obigen Diagramm in Farbe graphisch dar. ... siehe oben

(c) Für welche Anzahl Gesprächsminuten (im Monat) ist es günstiger, mit Moonlight zu telefonieren?

Es ist günstiger mit Moonlight zu telefonieren, wenn die Anzahl Gesprächsminuten zwischen 200 und 800 liegt.

Aufgabe 7



In nebenstehender Figur siehst Du ein grosses rechtwinkliges Dreieck, das in vier Teildreiecke A, B, C und D unterteilt ist.

Die vier Teildreiecke haben alle den gleichen Flächeninhalt!

Die Katheten des rechtwinkligen Teildreiecks A messen $20\,\text{cm}$ und x.

(a) Es sei $x = 15\,\text{cm}$. Wie lang ist die Strecke y?

(b) Wie gross muss x sein, damit $y = 110\,\text{cm}$ ist

(a) Die Flächeninhalte der vier Teildreiecke sind alle gleich gross:

$$F_D = F_C = F_B = F_A = \frac{20\,\text{cm} \cdot x}{2} = \frac{20\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm}}{2} = 150\,\text{cm}^2$$

Der Reihe nach findet man:

$$F_B = \frac{20\,\text{cm} \cdot b}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2 \cdot F_B}{20\,\text{cm}} = \frac{2 \cdot 150\,\text{cm}^2}{20\,\text{cm}} = \underline{15\,\text{cm}}$$

$$F_C = \frac{c \cdot (x+b)}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2 \cdot F_C}{x+b} = \frac{2 \cdot 150\,\text{cm}^2}{30\,\text{cm}} = \underline{10\,\text{cm}}$$

$$F_D = \frac{d \cdot (20\,\text{cm} + c)}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2 \cdot F_D}{20\,\text{cm} + c} = \frac{2 \cdot 150\,\text{cm}^2}{30\,\text{cm}} = \underline{10\,\text{cm}}$$

Schliesslich ist $y = x + b + d = \underline{\underline{40\,\text{cm}}}$

Variante: Nach der Berechnung von c folgt: $y = \dfrac{2 \cdot (4 \cdot 150\,\text{cm}^2)}{20\,\text{cm} + 10\,\text{cm}} = \dfrac{1200\,\text{cm}^2}{30\,\text{cm}} = \underline{\underline{40\,\text{cm}}}$

(b) Diesmal gilt: $F_D = F_C = F_B = F_A = \dfrac{20\,\text{cm} \cdot x}{2} = x \cdot 10\,\text{cm}$, sowie:

$$b = \frac{2 \cdot F_B}{20\,\text{cm}} = \frac{2 \cdot x \cdot 10\,\text{cm}}{20\,\text{cm}} = \underline{x}$$

$$c = \frac{2 \cdot F_C}{x+b} = \frac{2 \cdot x \cdot 10\,\text{cm}}{2x} = \underline{10\,\text{cm}}$$

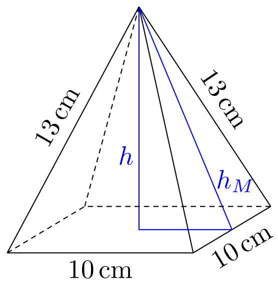
$$d = \frac{2 \cdot F_D}{20\,\text{cm} + c} = \frac{2 \cdot x \cdot 10\,\text{cm}}{30\,\text{cm}} = \underline{\tfrac{2}{3}x}$$

Nun soll gelten: $y = x + b + d = x + x + \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}x = 110\,\text{cm}$.

Also ist $x = \frac{3}{8} \cdot 110\,\text{cm} = \underline{\underline{41.25\,\text{cm}}}$

Aufgabe 8

Bei einer quadratischen Pyramide messen die Kanten der Grundfläche 10 cm und die Kanten zur Spitze 13 cm.



(a) Berechne den Oberflächeninhalt S der Pyramide.

(b) Berechne das Volumen V der Pyramide.

(a) Die Grundfläche G misst $G = 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} = 100\,\text{cm}^2$.

Um den Flächeninhalt F_M eines Mantel-Dreiecks zu berechnen, wird die Höhe h_M mit dem Satz von Pythagoras berechnet: $h_M = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$. Die Höhe misst also 12 cm. Der Inhalt F_M ist daher $F_M = \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 60\,\text{cm}^2$.

Die Oberflächeninhalt S der Pyramide ist daher $S = G + 4F_M = 100\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 60\,\text{cm}^2 = \underline{\underline{340\,\text{cm}^2}}$.

(b) Um die Höhe h der Pyramide zu berechnen benutzt man wiederum den Satz von Pythagoras für das Dreieck, das oben blau eingezeichnet wurde.

Es gilt $h = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{144 - 25} = \sqrt{119} \approx 10.91$. Die Höhe misst also $h = 10.91\,\text{cm}$.

Das Volumne der Pyramide berechnet sich nun wie folgt:

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 100\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{119}\,\text{cm} = \underline{\underline{363.62\,\text{cm}^3}}$.

Mit dem Näherungswert von oben erhält man

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 100\,\text{cm}^2 \cdot 10.91\,\text{cm} = \underline{\underline{363.66\,\text{cm}^3}}$.

Aufgabe 9

In einem grossen Terrarium hatte es drei mal so viele Mäuse wie Schlangen, und ausserdem hatte es 7 Schlangeneier. Nachdem 18 Mäuse gefressen wurden, und aus allen Eiern je eine Schlange geschlüpft ist, befinden sich genau halb so viele Schlangen wie Mäuse im Terrarium. Wie viele Mäuse und Schlangen sind jetzt im Terrarium?

Löse die Aufgabe mit einer Gleichung!

Es sei x die Anzahl Schlangen zu Beginn.
Dann ist $3x$ die Anzahl Mäuse zu Beginn.

Jetzt hat es $x + 7$ Schlangen sowie $3x - 18$ Mäuse im Terrarium.

Da es halb so viele Schlangen wie Mäuse sind, erhält man die Gleichung

$$2 \cdot (x + 7) = 3x - 18$$

Auflösen der Gleichung:

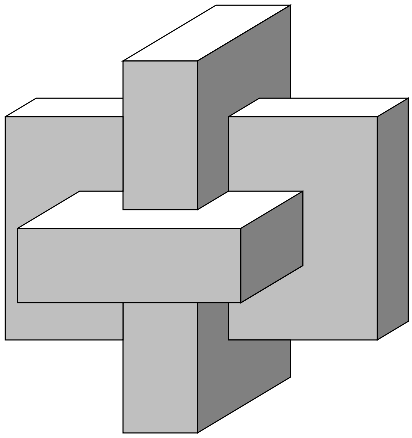
$$\begin{aligned} 2 \cdot (x + 7) &= 3x - 18 \\ 2x + 14 &= 3x - 18 \\ 32 &= x \end{aligned}$$

Es hatte zu Beginn 32 Schlangen. Also sind es jetzt $\underline{\underline{\text{39 Schlangen}}}$ und somit $\underline{\underline{\text{78 Mäuse}}}$.

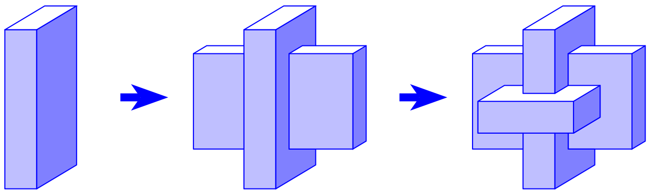
Aufgabe 10

Der unten dargestellte Körper entsteht aus der Durchdringung von drei Quadern mit den gleichen Abmessungen: $2\,\text{cm}\times 6\,\text{cm}\times 10\,\text{cm}$.

Bestimme das Volumen dieses Körpers.



Variante 1: Der Körper wird durch Hinzufügen von Platten(teilen) aufgebaut.



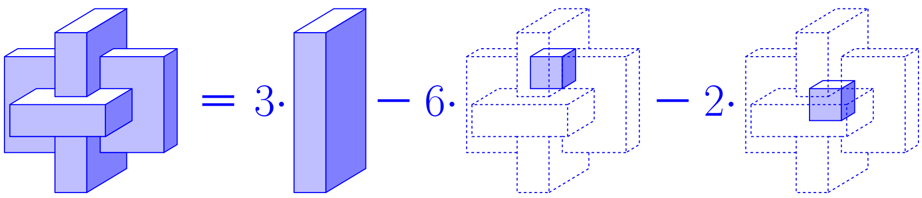
Die erste Platte hat ein Volumen von $V_1 = 2\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} = 120\,\text{cm}^3$.
Die zweite Platte muss um von 10 cm Länge auf 8 cm gekürzt werden: $V_2 = 2\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 8\,\text{cm} = 96\,\text{cm}^3$
Bei der dritten Platte müssen – nebst dem Kürzen – auch noch 2 Einschnitte $2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^3$ gemacht werden: $V_3 = 96\,\text{cm}^3 - 2 \cdot 8\,\text{cm}^3 = 80\,\text{cm}^3$.

Das Volumen ist $V = V_1 + V_2 + V_3 = 120\,\text{cm}^3 + 96\,\text{cm}^3 + 80\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{296\,\text{cm}^3}}$.

Variante 2: Die Durchdringung wird berechnet.

Eine Platte hat das Volumen $V_1 = 2\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} = 120\,\text{cm}^3$.

Drei Platten haben das Volumen $3 \cdot V_1 = 360\,\text{cm}^3$. Dieses Volumen ist zu gross, da gewisse Teile doppelt, andere gar dreifach gezählt wurden:

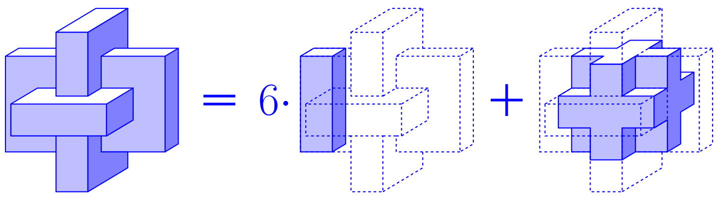


Bei der Durchdringung wird der Würfel mit Volumen $V_W = 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^3$ im Zentrum dreifach gezählt. Er muss also beim Durchdringungsvolumen doppelt abgezählt werden.

Ausserdem entstehen bei der Durchdringung 6 zweier Platten 6 Würfel mit Volumen $V_S = 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^3$, die doppelt gezählt wurden. Diese müssen einfach vom Volumen $3V_1$ abgezogen werden.

Somit wird das Volumen wie folgt berechnet:
$V = 3V_1 - 6V_S - 2V_W = 360\,\text{cm}^3 - 6 \cdot 8\,\text{cm}^3 - 2 \cdot 8\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{296\,\text{cm}^3}}$.

Variante 3: Abschneiden zu einem Würfel mit ausgehöhlten Ecken.



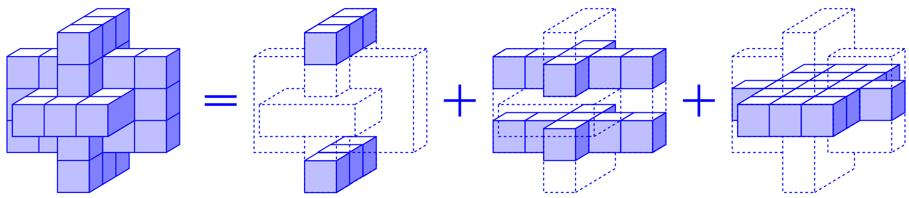
Die 6 Stäbe haben je das Volumen $V_S = 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} = 24\,\text{cm}^3$.

Der Würfel (mit aufgefüllten Ecken) hat die Kantenlänge 6 cm und daher das Volumen $V_G = 6\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^3$.

Jede Ecke ist ein Würfel mit Volumen $V_W = 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^3$.

Daher berechnet sich das Volumen des Körpers wie folgt:
$V = 6 \cdot V_S + V_G - 8 \cdot V_W = 6 \cdot 24\,\text{cm}^3 + 216\,\text{cm}^3 - 8 \cdot 8\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{296\,\text{cm}^3}}$.

Variante 4: Der Körper wird in Würfelchen unterteilt und diese abgezählt.



In der obersten und untersten Schicht hat es je 3 Würfelchen.

In der zweitobersten und zweituntersten hat es je 7 Würfelchen.

In der mittleren Schicht hat es 17 Würfelchen.

Insgesamt sind dies $2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 17 = 37$ Würfelchen.

Jedes hat ein Volumen von $2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^3$.

Das Volumen des Körpers ist daher $V = 37 \cdot 8\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{296\,\text{cm}^3}}$.

Aufgabe 11

Gegeben ist ein Dreieck ABC und eine Gerade g.

Das Dreieck ABC soll so an einer Achse gespiegelt werden, dass beim gespiegelten Dreieck $A'B'C'$ die Seite $A'B'$ auf der Geraden g liegt.

Konstruiere alle Lösungen.

Schreibe einen Lösungsweg und führe die Konstruktion direkt auf diesem Blatt aus. Der Lösungsweg soll so formuliert werden, dass die entscheidende Idee zum Ausdruck kommt.

Lösungsweg:

1. Es ist h die Gerade durch A und B.

2. Es sind w_1 und w_2 die beiden Winkelhalbierenden zu den Geraden g und h.

3. Spiegle das Dreieck ABC an w_1 und an w_2.

Es gibt 2 Lösungen.

Konstruktion: