

Lösungen FMS-Aufnahmeprüfung 2016 Mathematik

1. Löse die Gleichungen nach x auf und schreibe die Lösung als ganze Zahl oder als gekürzten Bruch:

a)
$$5 \cdot \frac{x}{3} - \frac{4x+9}{9} = \frac{x+11}{15} \quad | \cdot 45$$

$$15 \cdot 5x - 5 \cdot (4x + 9) = 3 \cdot (x + 11)$$

$$75x - 20x - 45 = 3x + 33$$

$$52x = 78$$

$$x = \frac{78}{52} = \frac{3}{2}$$

b)
$$(8x - 1) \cdot (x - 2) + x^2 = (3x - 2)^2$$

$$8x^2 - 16x - x + 2 + x^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$-5x = 2$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

2. Vereinfache die folgenden Terme.

- a) Schreibe das Ergebnis ohne Klammer:

$$5 \cdot (3a^2 - a) - (3a - 1) \cdot (2 + 7a) - 4a$$

$$15a^2 - 5a - 6a - 21a^2 + 2 + 7a - 4a$$

$$-6a^2 - 8a + 2$$

- b) Kürze:

$$\frac{2p^3 - 8p^2}{p^2 - 8p + 16} = \frac{2p^2 \cdot (p - 4)}{(p - 4)^2} = \frac{2p^2}{(p - 4)}$$

- c) Fasse so weit als möglich zusammen:

$$(5c)^{-2} \cdot c^4 = \frac{1}{25} \cdot c^{-2} \cdot c^4 = \frac{c^2}{25}$$

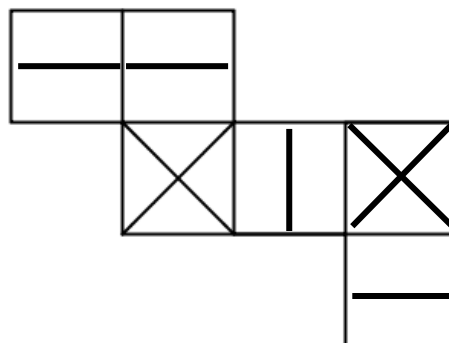
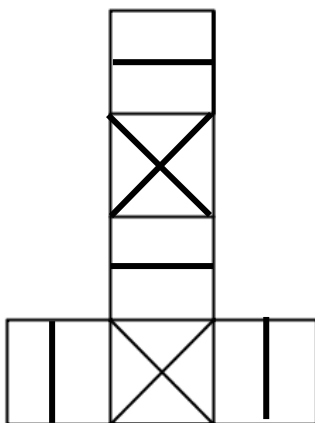
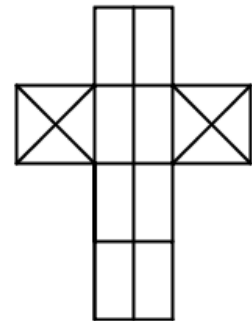
3. a) 100 Regentropfen ergeben ca. 7 cm^3 Wasser.
Wie viele Regentropfen sind in einer Regentonne, die 480 Liter fasst?

$$480 \text{ Liter} \triangleq 480'000 \text{ cm}^3 \triangleq \frac{100 \cdot 480'000}{7} \approx 6'857'143 \text{ Regentropfen}$$

- b) Die Regentonne wird auf einem ebenen Platz ohne Abfluss ausgeleert.
Wie hoch steht dann das Wasser, wenn der Platz eine Fläche von 25 m^2 hat?
(Resultat in mm angeben!)

$$480 \text{ Liter} \triangleq 0.48 \text{ m}^3 \Rightarrow \frac{0.48}{25} = 0.0192 \text{ m} = 19.2 \text{ mm}$$

4. Bei einem Würfel sollen zwei gegenüberliegende Seiten ein X zeigen, die übrigen vier Seiten sollen so markiert sein, dass eine zusammenhängende Linie rund um den Würfel läuft.
Du siehst nebenan ein mögliches Netz eines solchen Würfels:
Vervollständige die beiden unteren Würfelnetze so, dass daraus ein gleichartiger Würfel entsteht. Dabei ist jeweils eine Seitenfläche mit einem ,X' vorgegeben.



5. Das Randen-Bike-Race ist ein Plauschrennen für Mountainbikefahrer, das einmal jährlich ausgetragen wird. Der letztjährige Sieger erreichte auf der 50 Kilometer langen Strecke eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 28.72 km/h.

a) Berechne, wie lange der Sieger unterwegs war und gib die Zeit in der Form Stunden : Minuten : Sekunden an.

$$\frac{50}{28.72} = 1.740947 \text{ Stunden} = 1 \text{ Stunde } 44.45682 \text{ Minuten} = 1 \text{ Stunde } 44 \text{ Min. } 27 \text{ Sek.}$$

$$1 : 44 : 27$$

b) Die schnellste Frau benötigte 41 Minuten und 54 Sekunden mehr als der Sieger. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte sie? (Resultat in km/h auf zwei Nachkommastellen genau.)

$$1 \text{ Stunde } 44 \text{ Min. } 27 \text{ Sek.} + 41 \text{ Min. } 54 \text{ Sek.} = 2 \text{ Std } 26 \text{ Min. } 21 \text{ Sek.} = 2.4392 \text{ Std}$$

$$\frac{50 \text{ km}}{2.4392 \text{ h}} = 20.50 \text{ km/h}$$

6. Bei einem bestimmten Automodell fasst der Benzintank 46 Liter und damit kommt man ohne nachzutanken 575 km weit.

Bei einem neueren Modell wurde der Tank um 12% vergrößert und der Verbrauch um 8% gesenkt.

a) Wie viele Liter Benzin verbraucht das neuere Modell pro gefahrenen Kilometer? (Ergebnis auf vier Nachkommastellen runden.)

$$\text{Altes Modell: } 46 \text{ l} / 575 \text{ km} = 0.08 \text{ l/km}$$

$$\text{Neues Modell: } 0.08 \text{ l/km} \cdot \frac{92}{100} = 0.0736 \text{ l/km}$$

b) Wie weit kommt man ohne nachzutanken mit einem vollen Benzintank des neueren Modells?

$$\text{Neue Tankgrösse: } 46 \text{ l} \cdot \frac{112}{100} = 51.52 \text{ Liter}$$

$$\text{Neue Reichweite: } \frac{51.52}{0.0736} = 700 \text{ km.}$$

7. Im kommenden Juni wird der neue Gotthard-Eisenbahn-Basistunnel eingeweiht. Der Tunnel besteht eigentlich aus zwei zylinderförmigen Röhren mit jeweils 57 km Länge und einem Durchmesser von je 9.2 m.
- a) Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit demselben Volumen wie sämtliches Gestein, das beim Bau der beiden Tunnelröhren ausgebrochen und abtransportiert werden musste.

$$V = 2 \cdot \pi \cdot 4.6^2 \cdot 57000 = 7'578'275.5 \text{ m}^3 \quad a = \sqrt[3]{V} = 196.4 \text{ m}$$

- b) Anstelle von zwei Tunnelröhren mit kreisförmigem Querschnitt hätte man auch einen breiteren Tunnel mit unten abgebildetem Querschnitt bauen können. Der Querschnitt besteht bei dieser Variante aus einem Rechteck, wo links und rechts je ein Halbkreis angesetzt wird. Die Höhe des Tunnels beträgt ebenfalls 9.2 m. Wie breit wird dieser Tunnel, wenn die neue Querschnittsfläche gleich gross sein soll, wie die beiden kreisförmigen Tunnelquerschnitte zusammen?

$$\begin{aligned} A_{20} &= 2 \cdot \pi \cdot 4.6^2 = 132.95 \text{ m}^2 = \pi \cdot 4.6^2 + 9.2 \cdot x \\ 66.48 \text{ m}^2 &= 9.2x \\ x &= 7.23 \text{ m} \\ \text{Breite} &= x + 9.2 = 16.43 \text{ m} \end{aligned}$$

8. In Basel wird die Höhe des Rheines gemessen (sog. Pegel) und je höher dieser Pegelstand ist, desto mehr Wasser fliesst den Rhein hinab (sog. Abflussmenge). Bei einem Pegelstand von 700 cm fliesen 1800 m³/s Wasser rheinabwärts, bei einem Pegelstand von 850 cm sind es 3000 m³/s. Wir nehmen an, dass der Zusammenhang zwischen Pegelstand und Abflussmenge linear ist.
- a) Welche Steigung hat die Gerade, die diesen Sachverhalt veranschaulicht?

$$\frac{3000 - 1800}{850 - 700} = \frac{1200}{150} = 8 \text{ [m}^3\text{/(s} \cdot \text{cm)]}$$

- b) Welchen Pegelstand würde man folglich bei einer Abflussmenge von 1300 m³/s erwarten?

$$8 \text{ m}^3/\text{s} \triangleq 1 \text{ cm Pegelstand}$$

$$500 \text{ m}^3/\text{s} \triangleq 62.5 \text{ cm Pegelstand}$$

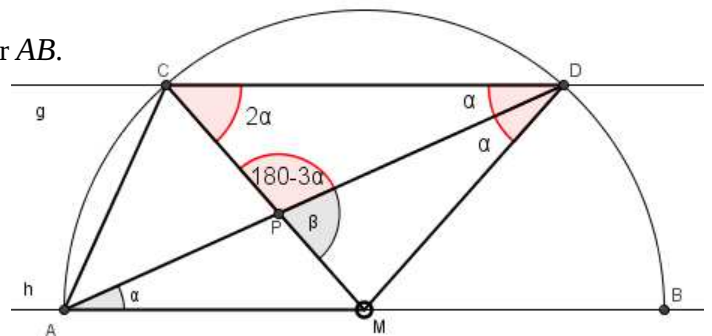
$$\Rightarrow \text{Neuer Pegelstand} = 700 \text{ cm} - 62.5 \text{ cm} = 637.5 \text{ cm}$$

9. Felix hat im Lotto gewonnen. Von diesem Betrag werden 35% an Gewinnsteuern abgezogen und er erhält nur die andern 65% ausbezahlt. Davon zahlt er 72% auf sein Bankkonto ein und mit 16% des erhaltenen Betrages gönnt er sich eine Reise. Die verbleibenden 2521.35 Franken spendet er für einen gemeinnützigen Zweck.
Wie gross war sein ursprünglicher Gewinn vor Abzug der Gewinnsteuer ?

2521.35 Fr. $\triangleq 0.65 \cdot 0.12 = 0.078 = 7.8\%$ des ursprünglichen Gewinnes.
32'325 Fr. war sein ursprünglicher Gewinn.

10. Die beiden Geraden g und h sind parallel.
 M ist der Mittelpunkt des Halbkreises über AB .

- a) Der Winkel α misst 22° .
Berechne den Winkel β .



$$\begin{aligned} \sphericalangle ADC &= \sphericalangle MAD = \alpha = 22^\circ \text{ (Wechselwinkel)} \\ \sphericalangle MDA &= \sphericalangle MAD = \alpha = 22^\circ \text{ (}\triangle MAD \text{ ist gleichschenkelig)} \\ \Rightarrow \sphericalangle MDC &= 2\alpha = 44^\circ. \\ \sphericalangle MCD &= \sphericalangle MDC = 2\alpha = 44^\circ \text{ (}\triangle MCD \text{ ist gleichschenkelig)} \\ \Rightarrow \sphericalangle PCD &= 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha = 114^\circ \\ \beta &= 180^\circ - \sphericalangle PCD = 66^\circ \end{aligned}$$

- b) Wie gross ist α , wenn β um 35° grösser als α ist?

$$\begin{aligned} \sphericalangle PCD + \beta &= 180^\circ \\ 180^\circ - 3\alpha + \beta &= 180^\circ \text{ (s.oben)} \\ 180^\circ - 3\alpha + \alpha + 35^\circ &= 180^\circ \\ 35^\circ &= 2\alpha \\ 17.5^\circ &= \alpha. \end{aligned}$$

11. Ein Kiosk-Besitzer bietet Cola-Getränke in drei verschiedenen Grössen an:
 In Cola-Dosen, die 330 ml fassen, in kleinen 5-dl-Petflaschen und in grossen 1.5-Liter-Petflaschen. An einem Tag verkauft er acht 5-dl-Petflaschen mehr als Cola-Dosen, aber nur halb so viele grosse Petflaschen wie kleine Petflaschen.
 Insgesamt hat er an diesem Tag 41.6 Liter Cola verkauft.
 Wie viele Cola-Dosen und wie viele Flaschen von jeder Grösse hat er verkauft?
 Stelle dazu eine korrekte Gleichung auf.

Er hat x kleine 5-dl-Petflaschen,
 $x-8$ Cola-Dosen und
 $\frac{1}{2}x$ grosse 1.5-Liter-Petflaschen verkauft.

In Litern:

$$\begin{aligned} 0.5 \cdot x + 0.33 \cdot (x-8) + 1.5 \cdot \frac{1}{2}x &= 41.6 \\ 0.5x + 0.33x - 2.64 + 0.75x &= 41.6 \\ 1.58x &= 44.24 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Er hat 28 kleine, 14 grosse Petflaschen und 20 Dosen verkaufen.

12. Die Kantenlänge des abgebildeten Würfels ist 10 cm. Die Ecken A und B des Dreiecks ABC sind Eckpunkte des Würfels, die Ecke C liegt x cm über der Würfecke P auf der Kante PQ .

- a) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC , wenn $x = 7.5$ cm ist.
 (Resultat auf mm^2 genau!)

$$AB = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.142 \text{ cm}, \quad MB = \frac{1}{2} \cdot AB = 7.071 \text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{10^2 + 7.5^2} = 12.5 \text{ cm}$$

$$h = MC = \sqrt{12.5^2 - 7.071^2} = 10.308 \text{ cm}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = 72.89 \text{ cm}^2$$

- b) Drücke die Fläche des Dreiecks ABC allgemein durch einen Term in Abhängigkeit von x aus.

$$AB = 14.142$$

$$MB = 7.071$$

$$BC^2 = 10^2 + x^2$$

$$\begin{aligned} h = MC &= \sqrt{BC^2 - MB^2} = \sqrt{100 + x^2 - 50} \\ &= \sqrt{x^2 + 50} \end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = MB \cdot h = 7.071 \cdot \sqrt{x^2 + 50} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{x^2 + 50}$$

