Mathematik
Aufnahmeprüfung 2017

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	3	4	45

Aufgabe 1

(a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$(-2)\cdot\left[3x\cdot(-x+\tfrac{1}{2})+x\right]-(x-4)\ =?$$

(b) Vereinfache so weit wie möglich und schreibe als vollständig gekürzten Bruch:

$$3a\cdot\frac{2c^2+c^2}{a^2b^3}:\frac{6c}{ab}\ =?$$

(a)

$$\begin{aligned}(-2)\cdot\left[3x\cdot(-x+\tfrac{1}{2})+x\right]-(x-4) &= -2\cdot\left[-3x^2+\tfrac{3}{2}\,x+x\right]-x+4\\ &= -2\cdot\left[-3x^2+\tfrac{5}{2}\,x\right]-x+4\\ &= 6x^2-5x-x+4\\ &= \underline{\underline{6x^2-6x+4}}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}3a\cdot\frac{2c^2+c^2}{a^2b^3}:\frac{6c}{ab} &= 3a\cdot\frac{3c^2}{a^2b^3}\cdot\frac{ab}{6c}\\ &= \frac{9c^2a^2b}{6a^2b^3c}\\ &= \underline{\underline{\frac{3c}{2b^2}}}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Löse folgende Gleichungen nach x auf. Gib das Resultat vollständig gekürzt an.

(a) $\dfrac{3-x}{2} - \dfrac{4+2x}{3} = 1$

(b) $x \cdot (2x+1) = 2x \cdot (x-1) + 3 \cdot (2x+1)$

(a)

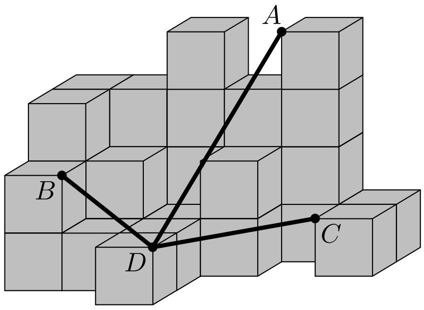
$$\begin{aligned} \frac{3-x}{2} - \frac{4+2x}{3} &= 1 \\ 3 \cdot (3-x) - 2 \cdot (4+2x) &= 6 \\ 9 - 3x - 8 - 4x &= 6 \\ 1 - 7x &= 6 \\ -7x &= 5 \\ x &= \underline{\underline{-\tfrac{5}{7}}} \end{aligned}$$

(b)

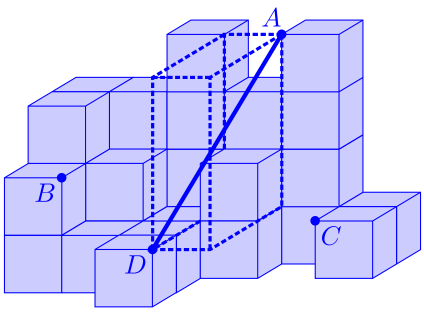
$$\begin{aligned} x \cdot (2x+1) &= 2x \cdot (x-1) + 3 \cdot (2x+1) \\ 2x^2 + x &= 2x^2 - 2x + 6x + 3 \\ -3 &= 3x \\ x &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

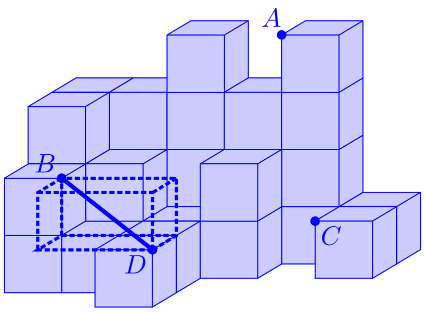
Gegeben ist der folgende Würfelkörper. Die Würfelchen haben jeweils die Kantenlänge 1 cm. Eingezeichnet sind vier Ecken A, B, C und D.



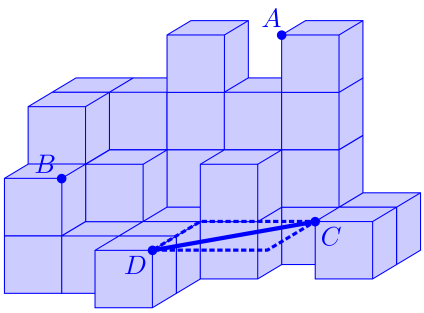
Berechne die Summe der drei Streckenlängen AD, BD und CD. Gib das Resultat auf 2 Stellen nach dem Komma genau an.



Die Strecke AD ist die Körperdiagonale eines Quaders mit den Abmessungen $1\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$. Daher gilt $AD = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2}\,\text{cm} = \sqrt{19}\,\text{cm}$.



Die Strecke BD ist die Körperdiagonale eines Quaders mit den Abmessungen $2\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$. Daher gilt $BD = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}\,\text{cm} = \sqrt{6}\,\text{cm}$.



Die Strecke CD ist die Flächendiagonale eines Rechtecks mit den Abmessungen $2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$. Daher gilt $CD = \sqrt{2^2 + 2^2}\,\text{cm} = \sqrt{8}\,\text{cm}$.

Insgesamt ergibt sich die Länge $\sqrt{19}\,\text{cm} + \sqrt{6}\,\text{cm} + \sqrt{8}\,\text{cm} \approx \underline{\underline{9.64\,\text{cm}}}$.

Aufgabe 4

Zahlenmeister Zuse hat mehrere Bauteile vom Typ A und vom Typ B, die Zahlen verarbeiten können.

$$\rightarrow\boxed{A}\rightarrow \qquad\qquad \rightarrow\boxed{B}\rightarrow$$

Jedes der Bauteile kann eine Eingabezahl entgegennehmen, mit dieser eine bestimmte Rechnung ausführen und dann das Ergebnis ausgeben.

Beim Bauteil vom Typ A wird eine Zahl verdreifacht und sodann vom Produkt 5 abgezogen. Der Typ B halbiert die gegebene Zahl und addiert danach 1 zum Resultat. Beispiel:

$$2\rightarrow\boxed{A}\rightarrow 1 \qquad\qquad 4\rightarrow\boxed{B}\rightarrow 3$$

Nun schaltet Zuse drei Bauteile gemäss folgendem Schema hintereinander:

$$\rightarrow\boxed{A}\rightarrow\boxed{B}\rightarrow\boxed{A}\rightarrow$$

Zuerst kommt also A zum Einsatz, dann B und schliesslich wieder A.

(a) Zuse gibt am Anfang die Zahl $\frac{10}{3}$ ein. Berechne die Zahl, welche am Ende ausgegeben wird.

$$\frac{10}{3}\rightarrow\boxed{A}\rightarrow\boxed{B}\rightarrow\boxed{A}\rightarrow ?$$

(b) Welche Zahl x muss Zuse am Anfang eingeben, damit am Ende die gleiche Zahl x ausgegeben wird? Die Aufgabe ist mit Hilfe einer Gleichung zu lösen.

(a)

$$\frac{10}{3}\rightarrow\boxed{A}\rightarrow 5\rightarrow\boxed{B}\rightarrow\frac{7}{2}\rightarrow\boxed{A}\rightarrow\underline{\underline{\frac{11}{2}}}$$

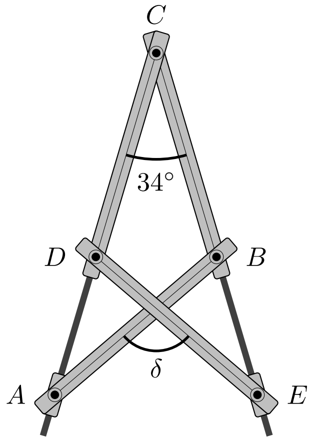
(b)

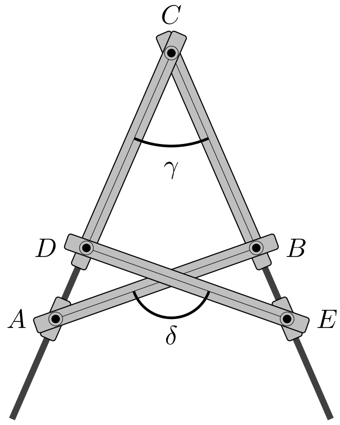
$$x\rightarrow\boxed{A}\rightarrow(3x-5)\rightarrow\boxed{B}\rightarrow\left(\frac{3x-5}{2}+1\right)\rightarrow\boxed{A}\rightarrow 3\cdot\left(\frac{3x-5}{2}+1\right)-5$$

$$\begin{aligned}
x &= 3\cdot\left(\tfrac{3x-5}{2}+1\right)-5\\
x+5 &= 3\cdot\tfrac{3x-3}{2}\\
2x+10 &= 9x-9\\
19 &= 7x\\
x &= \underline{\underline{\tfrac{19}{7}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Bei folgendem Gerät sind vier gleichlange Stäbe AB, BC, CD und DE mit Gelenken verbunden. Ausserdem liegt A auf der Verlängerung von CD und E auf der Verlängerung von CB.

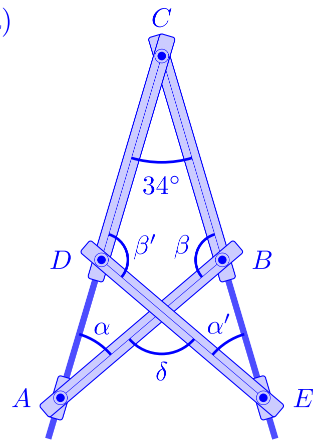




(a) Der Winkel bei C misst $34°$ (siehe die linke Figur). Berechne den Schnittwinkel δ zwischen den Strecken AB und DE.

(b) Der Winkel bei C ist γ (siehe die rechte Figur). Drücke den Schnittwinkel δ zwischen den Strecken AB und DE durch γ aus. Vereinfache das Resultat so weit als möglich.

(a)



Die beiden Dreiecke ABC und EDC sind gleichschenklig. Daher gilt

$\alpha = \sphericalangle CAB = 34°$ und $\alpha' = \sphericalangle CED = 34°$.

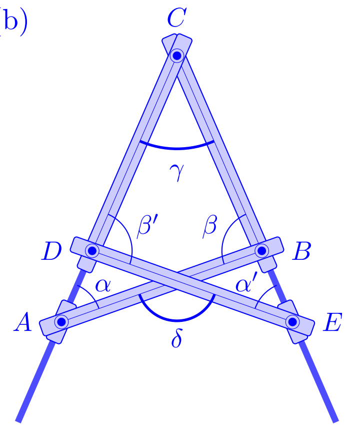
Weil die Winkelsumme im Dreieck immer $180°$ beträgt, so gilt

$\beta = \sphericalangle ABC = 180° - 34° - 34° = 112°$ und
$\beta' = \sphericalangle EDC = 180° - 34° - 34° = 112°$.

Die Winkelsumme im Viereck $BCDS$ (wobei S der Schnittpunkt der Strecken AB und ED bezeichnet) ist $360°$ und damit

$\delta = \sphericalangle BSD = 360° - 34° - 112° - 112° = \underline{\underline{102°}}$.

(b)



Die beiden Dreiecke ABC und EDC sind gleichschenklig. Daher gilt

$\alpha = \sphericalangle CAB = \gamma$ und $\alpha' = \sphericalangle CED = \gamma$.

Weil die Winkelsumme im Dreieck immer $180°$ beträgt, so gilt

$\beta = \sphericalangle ABC = 180^{\gamma} - \gamma = 180° - 2\gamma$ und genauso
$\beta' = \sphericalangle EDC = 180° - 2\gamma$.

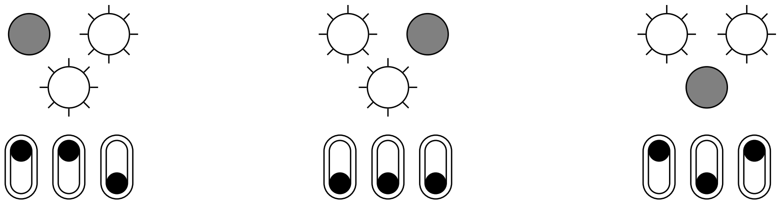
Die Winkelsumme im Viereck $BCDS$ (wobei S der Schnittpunkt der Strecken AB und ED bezeichnet) ist $360°$ und damit

$$\begin{aligned}\delta = \sphericalangle BSD &= 360° - \gamma - (180° - 2\gamma) - (180° - 2\gamma)\\ &= 360° - \gamma - 180° + 2\gamma - 180° + 2\gamma\\ &= \underline{\underline{3\gamma}}.\end{aligned}$$

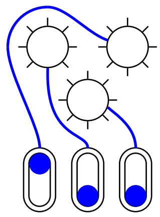
Aufgabe 6

Bei einer Lichtschaltung hat es oben 3 Lämpchen und unten 3 Schalter. Jeder Schalter ist mit genau einem Lämpchen durch ein (nicht eingezeichnetes) Kabel verbunden. Mit jedem Schalter kann genau ein Lämpchen ein- und ausgeschaltet werden.

Beobachte diese Lichtschaltung anhand der folgenden drei Situationen mit verschiedenen Schalterstellungen.



Bei welcher Schalterstellung leuchten alle drei Lämpchen? Zeichne die Schalterstellung in die untere Figur ein. Zeichne auch die Kabelverbindungen von den Schaltern zu den Lämpchen ein.



Vergleicht man die ersten zwei Positionen, so ist genau ein Schalter in der gleichen Position, nämlich der rechte. Auch ändern die oberen zwei Lämpchen ihren Zustand, und nur die untere bleibt gleich. Der rechte Schalter kontrolliert daher das untere Lämpchen und dieses leuchtet, wenn dieser Schalter in der unteren Position steht.

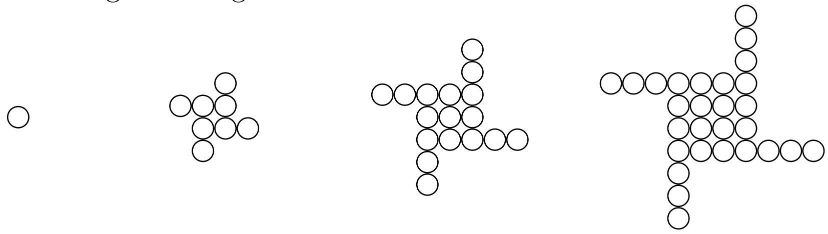
Vergleicht man die zweite Position mit der dritten, so zeigt sich eine ähnliche Situation. Der mittlere Schalter ist der einzige welcher bei beiden Situationen in der gleichen Stellung ist. Er kontrolliert daher das obere linke Lämpchen. Es leuchtet, wenn der Schalter unten ist.

Somit muss der linke Schalter das Lämpchen oben rechts kontrollieren. Dieses leuchtet, wenn der Schalter oben ist.

Die Situation ist daher so, wie sie eingezeichnet wurde.

Aufgabe 7

Betrachte die folgenden Figuren.



(a) Aus wie vielen Kreisen ist die nächste, 5-te Figur zusammengesetzt?

(b) Gib eine Formel an, welche die Anzahl Kreise in der n-ten Figur durch n ausdrückt.

(c) Welche Figur in dieser Folge ist zum ersten Mal aus mehr als 1000 Kreisen zusammengesetzt? Finde diese Figur mit Probieren.

(a) Die 5-te Figur besteht im Inneren aus einem Quadrat der Grösse 5×5 und 4 Armen der Länge 4. Die 5. Figur hat daher

$5^2 + 4 \cdot 4 = 25 + 16 = \underline{\underline{41}}$ Punkte.

(b) Die n-te Figur besteht im Inneren aus einem Quadrat der Grösse $n \times n$ und 4 Armen der Länge $n-1$. Die n. Figur hat daher

$\underline{\underline{n^2 + 4(n-1)}}$ Punkte.

(c) Für $n = 30$ sind es $30^2 + 4(30-1) = 900 + 120 - 4 = 1016 > 1000$ Kreise

Für $n = 29$ sind es $29^2 + 4(29-1) \ = \ 29^2 + 4 \cdot 28 \ = \ 29^2 + 112 \overset{\text{TR}}{=} 953 < 1000$ Kreise.

Die $\underline{\underline{\text{30-ste Figur}}}$ ist daher die erste, die aus mehr als 1000 Punkten besteht.

Aufgabe 8

Die Firma TeraBit bietet über das Internet Speicher-Sticks an. Bezahlen muss ein Kunde nur, wenn er mit der Qualität zufrieden ist. Andernfalls darf er den Stick kostenlos zurücksenden.

(a) Für jeden verkauften Stick beträgt der Gewinn 5 Fr. Für jeden wegen mangelnder Qualität zurückgesendeten Stick ist der Verlust 1.20 Fr.

Von 2500 bestellten Sticks wurden 40% wegen mangelnder Qualität zurückgesendet.

Wie gross ist der Gesamtgewinn?

(b) TeraBit entscheidet sich bessere Ware anzubieten. Der Gewinn pro verkauften Stick beträgt jetzt nur noch 3 Fr. Der Verlust pro zurückgesendeten Stick ist nach wie vor 1.20 Fr. Weil mehr Leute mit der Qualität zufrieden sind, reduziert sich nun die Anzahl der Rücksendungen um 90%.

Berechne den Gesamtgewinn bei 2500 bestellten Sticks.

(a) Anzahl verkaufte Sticks: $0.6 \cdot 2500 = 1500$

Anzahl zurückgesendete Sticks: $2500 - 1500 = 1000$ (bzw. $0.4 \cdot 2500 = 1000$)

Gewinn: $1500 \cdot 5 - 1000 \cdot 1.2 = 7500 - 1200 = \underline{\underline{6300}}$ Fr.

(b) Prozentualer Anteil der rückgesendeten Sticks: $0.4 \cdot 0.1 = 0.04$ (bzw 4%).

Anzahl zurückgesendete Sticks: $0.04 \cdot 2500 = 100$

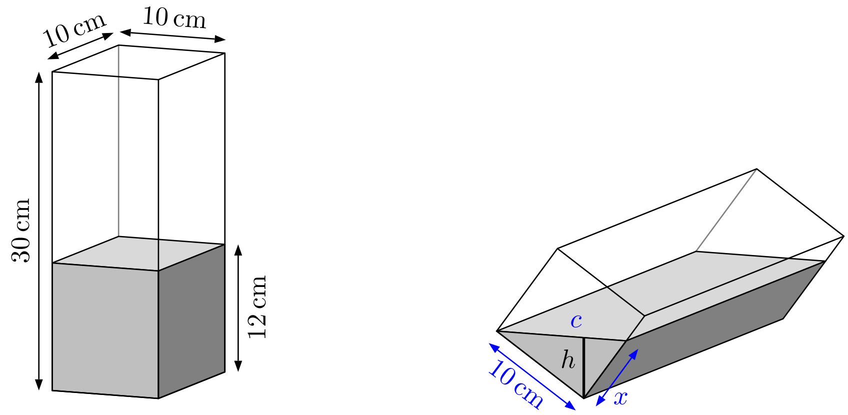
Anzahl verkaufte Sticks: $2500 - 100 = 2400$ (bzw. $0.96 \cdot 2500 = 2400$)

Gewinn: $2400 \cdot 3 - 100 \cdot 1.2 = 7200 - 120 = \underline{\underline{7080}}$ Fr.

Aufgabe 9

Ein quadratisches Prisma hat die Abmessungen $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$. Stehend ist es bis zur Höhe $12\,\text{cm}$ mit Wasser gefüllt (siehe linke Figur). Nun wird das Prisma gekippt und so auf eine Längskante gestellt, dass der Wasserspiegel genau durch eine Ecke des Quadrats geht (siehe rechte Figur).

Berechne die Wasserhöhe h in dieser zweiten Position.



Das Wasservolumen beträgt $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} \times 12\,\text{cm} = 1200\,\text{cm}^3$.

Das Wasser im liegenden Prisma nimmt die Form eines Prismas mit dreieckiger Grundfläche G an. Der Inhalt dieser Grundfläche misst

$$F_G = \frac{1200\,\text{cm}^3}{30\,\text{cm}} = 40\,\text{cm}^2.$$

Die Grundfläche G ist ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete der Länge $10\,\text{cm}$. Die andere Kathete misst daher

$$x = \frac{2 \cdot 40\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}} = 8\,\text{cm}.$$

Nach dem Satz von Pythagoras misst die Hypotenuse

$$c = \sqrt{(10\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2} = \sqrt{100\,\text{cm}^2 + 64\,\text{cm}^2} = \sqrt{164}\,\text{cm}.$$

Wegen $F_G = \frac{1}{2}c \cdot h$ folgt schliesslich

$$h = \frac{2 \cdot 40\,\text{cm}^2}{\sqrt{164}\,\text{cm}} \approx \underline{\underline{6.25\,\text{cm}}}.$$

Aufgabe 10

(a) Notiere alle Teiler der Zahl 150.

(b) Welche zwei Teiler haben die Zahl 150 als kgV und 5 als ggT? Notiere alle Zahlenpaare mit dieser Eigenschaft.

(a) Die Primfaktorzerlegung von 150 lautet

$$150 = 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Neben 1 und 150 lauten die (echten) Teiler:

$2, \quad 3, \quad 5, \quad 5^2 = 25, \quad 2{\cdot}3 = 6, \quad 2{\cdot}5 = 10, \quad 2{\cdot}5^2 = 50, \quad 3{\cdot}5 = 15, \quad 3{\cdot}5^2 = 75, \quad 2{\cdot}3{\cdot}5 = 30$

(b) Die Zahlenpaare mit der Eigenschaft, dass ihr kgV$=150$, und ihr ggT$=5$ ist, sind von der Form $5 \cdot a$, $5^2 \cdot b$, wobei a und b nicht durch 5 teilbar sind. Die möglichen Paare sind daher

$$(5 \cdot 2, 5^2 \cdot 3), \quad (5 \cdot 3, 5^2 \cdot 2), \quad (5 \cdot 2 \cdot 3, 5^2), \quad (5, 5^2 \cdot 2 \cdot 3),$$

Also:

$$\underline{\underline{(10, 75), (15, 50), (30, 25), (5, 150)}}$$

Aufgabe 11

Gegeben sind ein Spiegelzentrum S, ein Punkt A, sowie eine Gerade g'.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit der gegebenen Ecke A so, dass das Spiegelbild $B'D'$ der Diagonalen BD auf der Geraden g' liegt.

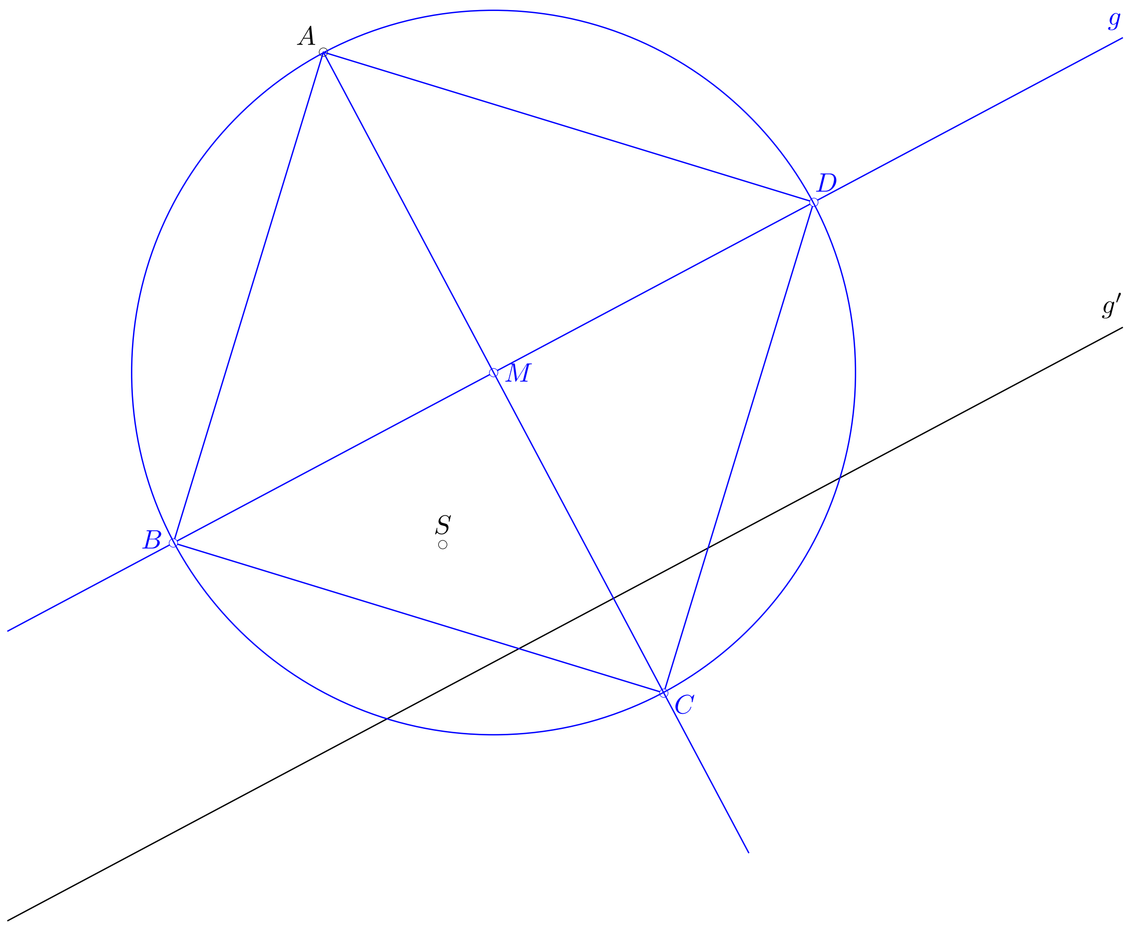
Die Korrektheit der Konstruktion muss zweifelsfrei erkennbar sein.

Eine Skizze kann hilfreich sein!

Wird die Diagonale BD an S gespiegelt, so erhält man die Gerade g'. Oder umgekehrt betrachtet: Spiegelt man g' an S, so erhält man die Diagonale g.

Nun ist sind noch die Ecken B, C, D zu konstruieren. Am einfachsten konstruiert man zuerst den Mittelpunkt M des Quadrats. Er ist der Fusspunkt des Lots ℓ von A auf g (also der Schnittpunkt der zu g senkrechten Gerade durch A).

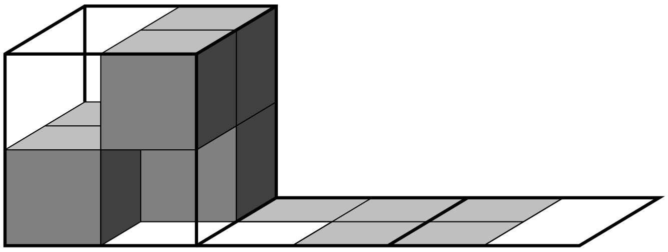
Nun kann der Umkreis des Quadrats konstruiert werden. Er schneidet g in den Ecken B, D und das Lot ℓ in C.



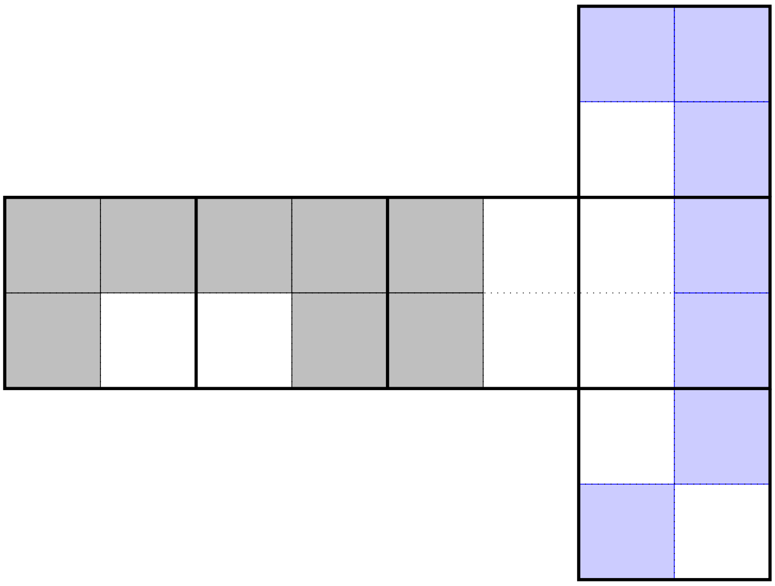
Aufgabe 12

(a) In einem Drahtwürfel der Kantenlänge 2 cm ist ein Würfelkörper eingeschlossen, dessen Würfelchen jeweils die Kantenlänge 1 cm haben.

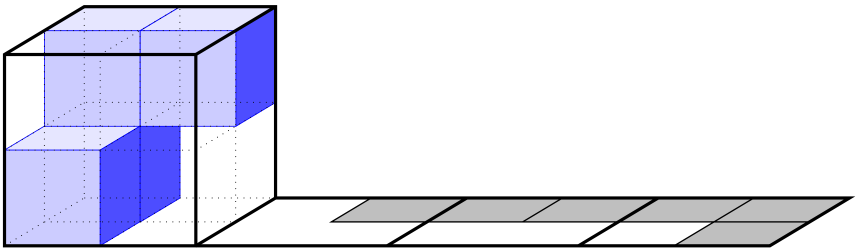
Der Drahtwürfel wird zweimal über seine Kanten nach rechts gekippt. Er hinterlässt dabei den folgenden Abdruck.



Vervollständige den Abdruck in den drei rechten Quadraten im folgenden Netz.



(b) Nun wird ein anderer Würfelkörper im Drahtwürfel eingeschlossen. Dieser Körper wird dreimal nach rechts gekippt und hinterlässt dabei den folgenden Abdruck.



Zeichne den Würfelkörper, so wie er zu Beginn stand in der obigen Würfelfigur ein.