Mathematik
Aufnahmeprüfung 2019

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	3	4	46

Aufgabe 1

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $(-3) \cdot (5 - 8z - 7 + z) \;= ?$

(b) $(x^3 - 2x^2) - (2x^3 + 4x - x^2) \;= ?$

Schreibe das Ergebnis vollständig gekürzt:

(c) $\dfrac{3p}{4} - \dfrac{5p}{12} - \dfrac{2p}{15} \;= ?$

(d) $\dfrac{5x^3}{y} \cdot \dfrac{y^2}{30x^2} \;= ?$

(a)

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (5 - 8z - 7 + z) &= (-3) \cdot (-2 - 7z) \\ &= \underline{\underline{6 + 21z}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (x^3 - 2x^2) - (2x^3 + 4x - x^2) &= x^3 - 2x^2 - 2x^3 - 4x + x^2 \\ &= \underline{\underline{-x^3 - x^2 - 4x}} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{3p}{4} - \frac{5p}{12} - \frac{2p}{15} &= \frac{45p}{60} - \frac{25p}{60} - \frac{8p}{60} \\ &= \frac{45p - 25p - 8p}{60} \\ &= \frac{12p}{60} \\ &= \underline{\underline{\frac{p}{5}}} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{5x^3}{y} \cdot \frac{y^2}{30x^2} &= \frac{5x^3 \cdot y^2}{y \cdot 30x^2} \\ &= \frac{5x^3y^2}{30x^2y} \\ &= \underline{\underline{\frac{xy}{6}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Löse die Gleichung nach der Unbekannten n auf:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2n}{5} - \frac{n}{2} \right) \;=\; \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{11}{6} - n \right)$$

(b) Löse die Gleichung nach der Unbekannten r auf:

$$r \cdot (r+1) + 2 \;=\; r \cdot (1-r) - 2\,r \cdot (2-r)$$

(a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4n - 5n}{10} \right) &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{11 - 6n}{6} \right) \\ \frac{-n}{30} &= \frac{22 - 12n}{30} \\ 11n &= 22 \implies \underline{\underline{n = 2}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} r^2 + r + 2 &= r - r^2 - 4r + 2r^2 \\ &= r^2 - 3r \\ 4r &= -2 \implies \underline{\underline{r = -\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

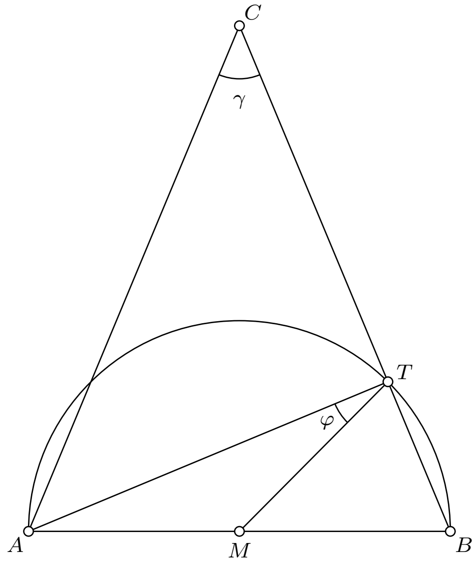
Aufgabe 3

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AC = BC$.

(a) Berechne den Winkel $\varphi = \sphericalangle ATM$ wenn $\gamma = 37.5°$ misst.

(b) Gib eine Formel an, die den Winkel $\varphi = \sphericalangle ATM$ durch γ ausdrückt.

Vereinfache so weit als möglich.



(a) Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt

$$\beta = \sphericalangle CBA = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{1}{2} \cdot \gamma = 90° - 18.75° = 71.25°\,.$$

Das Dreieck BMT ist ebenfalls gleichschenklig mit der Basis BT. Folglich ist $\sphericalangle MTB = \beta = 71.25°$. Weil $\sphericalangle ATB$ ein rechter Winkel ist, gilt

$$\underline{\underline{\varphi}} = 90° - \beta = 90° - 71.25° = \underline{\underline{18.75°}}\,.$$

(b) Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt

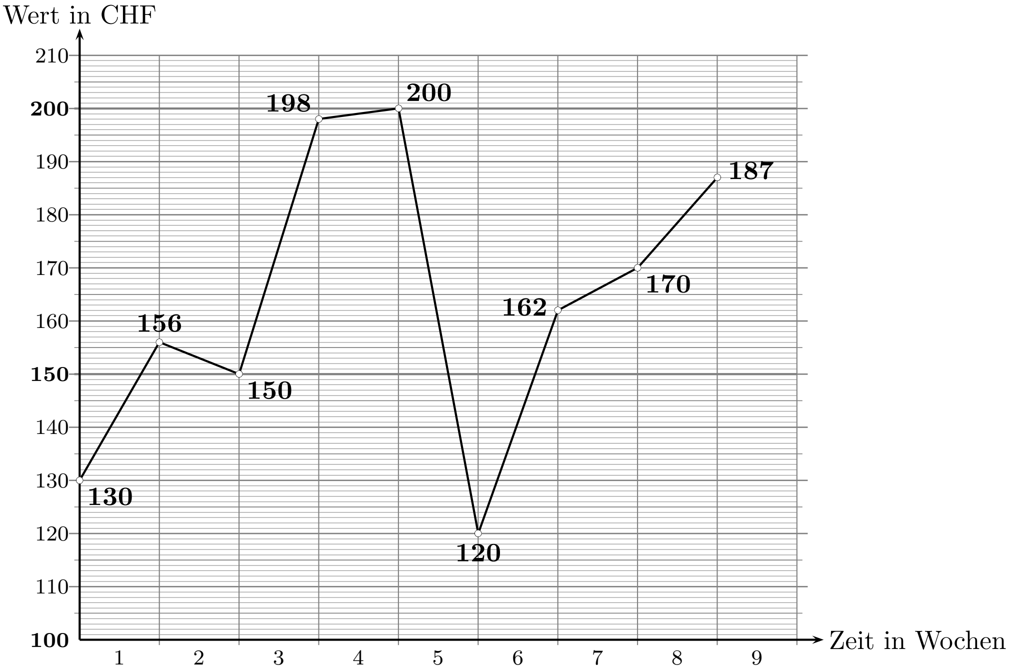
$$\beta = \sphericalangle CBA = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Da das Dreieck BMT auch gleichschenklig ist mit der Basis BT, folgt $\sphericalangle MTB = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Weil $\sphericalangle ATB$ ein rechter Winkel ist, gilt

$$\underline{\underline{\varphi}} = 90° - \beta = 90° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Aufgabe 4

Die folgende Grafik zeigt den Wert der Aktie des Unternehmens BigBusiness jeweils zum Handelsschluss der Börse am Freitagabend in den vergangenen 8 Wochen. In der 1. Woche stieg der Wert von 130 Franken auf 156 Franken.



(a) In welcher Woche war die Wertzunahme *in Franken* am grössten? Um wie viele Franken stieg die Aktie in dieser Woche?

(b) In welcher Woche war die Wertzunahme *in Prozent* am grössten? Um wie viel Prozent stieg die Aktie in dieser Woche?

(c) Angenommen, die Aktie steigt in der 9. Woche um gleich viel Prozent wie in der 8. Woche. Welchen Wert hat die Aktie dann am Ende der 9. Woche?

(a)

Die Betrachtung der Grafik ergibt, dass die Zunahmen in der Woche 3 und 6 überprüft werden müssen.

Zunahme in Franken in der Woche 3: $198 - 150 = 48$.

Zunahme in Franken in der Woche 6: $162 - 120 = 42$.

Die Zunahme in Franken war inder 3. Woche am grössten.

(b)

Auch hier sind die Wochen 3 und 6 zu betrachten.

Zunahme in Prozent in der Woche 3: $\frac{198-150}{150} = \frac{48}{150} = 0.32 = 32\%$.

Zunahme in Prozent in der Woche 6: $\frac{162-120}{120} = \frac{42}{120} = 0.35 = 35\%$.

Die Zunahme in Prozent war inder 6. Woche am grössten.

(c)

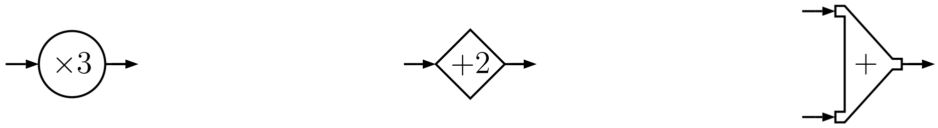
Zunahme in Prozent in der Woche 8: $\frac{187-170}{170} = \frac{17}{170} = 0.10 = 10\%$.

Steigt die Aktie in der 9. Woche weiterhin um 10%, so hat sie am Ende der Woche 9 den Wert $187 + 0.1 \cdot 187 = 205.7$.

Die Aktie hätte einen Wert von 205.70 CHF.

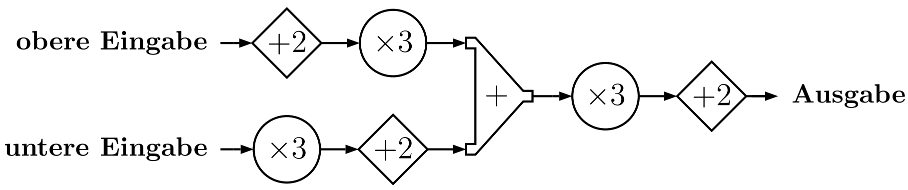
Aufgabe 5

Rechenmeister Reinhard besitzt drei Rechenelemente, welche die folgenden Berechnungen ermöglichen:



multipliziert mit 3 | addiert 2 dazu | addiert zwei Zahlen

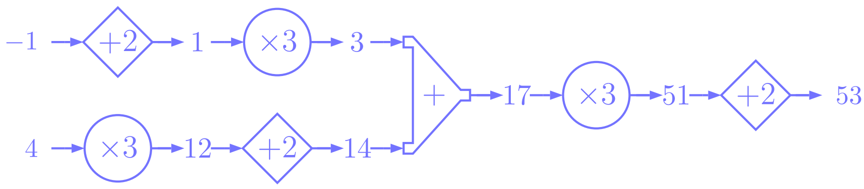
Er hat mit diesen Rechenelementen die folgende Rechenmaschine gebaut:



(a) Reinhard gibt in die obere Eingabe die Zahl -1 ein. Berechne die untere Eingabe so, dass die Ausgabe gleich 53 ist.

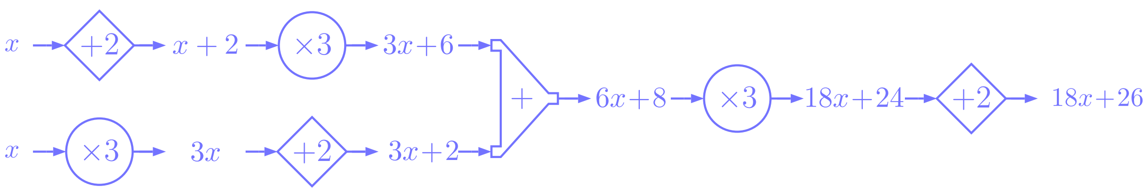
(b) Reinhard gibt in die obere und untere Eingabe je die gleiche Zahl x ein. Bei welcher Zahl x ist dann die Ausgabe gleich der Zahl 10? Stelle dazu eine Gleichung auf und löse diese.

(a) Aus der oberen Eingabe -1 und der Ausgabe 53 können folgende Zwischenresultate berechnet werden:



In der unteren Eingabe muss die Zahl $\underline{\underline{4}}$ eingegeben werden.

(b) In beiden Eingaben gibt Reinhard die Zahl x ein. Durch fortlaufende Vereinfachung erhält man folgende Zwischenwerte:



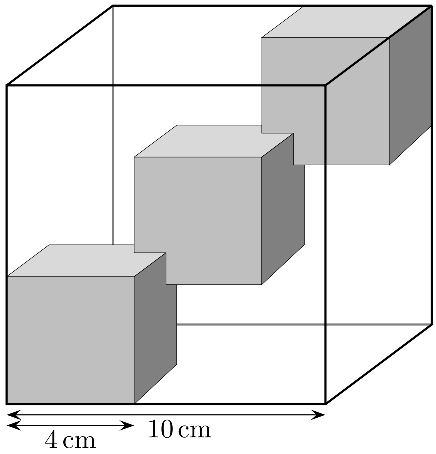
Die Gleichung, die lösen ist, lautet $18x + 26 = 10$.

Die Lösung kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} 18x + 26 &= 10 \\ 18x &= -16 \\ x &= -\frac{16}{18} = \underline{\underline{-\frac{8}{9}}} \end{aligned}$$

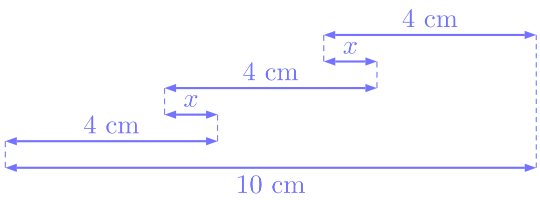
Aufgabe 6

In einem Plexiglaswürfel mit der Kantenlänge 10 cm wurde ein Metallkörper eingepasst. Er setzt sich aus drei gleich grossen Würfeln mit der Kantenlänge 4 cm zusammen, welche sich gegenseitig durchdringen. Der mittlere Metallwürfel liegt genau im Zentrum des Plexiglaswürfels.



Berechne die Oberfläche des Metallkörpers.

Zuerst berechnet man, wie stark die Würfel ineinander geschoben sind. Sei dazu x die horizontale Überlappungslänge.



Es gilt

$$4\,\text{cm} - x + 4\,\text{cm} - x + 4\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$$

und daher $x = 1\,\text{cm}$.

Die Oberfläche des Metallkörpers kann nun als Differenz berechnet werden:

$$\begin{pmatrix}\text{Oberfläche des}\\ \text{Metallkörpers}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Oberfläche der drei Würfel}\\ \text{ohne Durchdringung}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Oberfläche die wegen der}\\ \text{Durchdringung wegfällt}\end{pmatrix}$$

Die Oberfläche eines Würfels ist

$$F_W = 6 \cdot (4\,\text{cm})^2 = 96\,\text{cm}^2.$$

Die Oberfläche von 3 Würfeln ist daher

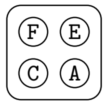
$$3F_W = 3 \cdot 96\,\text{cm}^2 = 288\,\text{cm}^2.$$

Auf dem Würfel links unten fällt 3 Mal eine Fläche $1\,\text{cm}^2$, also $3\,\text{cm}^2$ weg. Genauso ist es beim Würfel rechts oben. Beim Würfel in der Mitte fallen an zwei Ecken je $3\,\text{cm}^2$ weg. Insgesamt fällt also $4 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$ weg.

Somit erhalten wir die Oberfläche F des Metallkörpers

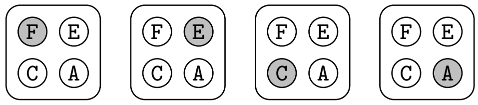
$$F = 288\,\text{cm}^2 - 12\text{cm}^2 = \underline{\underline{276\,\text{cm}^2}}.$$

Aufgabe 7



Das Gerät `Tell-Phone` kann mit einem vierbuchstabigen Code gesperrt werden. Die Buchstaben sind `A`, `C`, `E` und `F`. Das `Tell-Phone` kann entsperrt werden, wenn die Buchstaben in der richtigen Reihenfolge eingetippt werden.

Beim `Tell-Phone` muss im Code jeder der vier Buchstaben *genau einmal* vorkommen. Zum Beispiel sind `F-E-C-A` oder `C-A-F-E` derartige Codes. Die Abbildung zeigt das Eintippen des Codes `F-E-C-A`.



(a) Wie viele verschiedene Codes gibt es, bei denen `F` der erste Buchstabe ist, und die anderen drei Buchstaben `C`, `E`, `A` genau einmal vorkommen?

(b) Wie viele verschiedene Codes gibt es, bei denen die Buchstaben `A`, `C`, `E` und `F` genau einmal vorkommen?

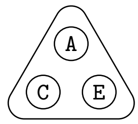
(a) Alle Möglichkeiten systematisch auflisten:

`FECA`, `FEAC`, `FCEA`, `FCAE`, `FAEC`, `FACE`

Es sind 6 verschiedene Codes.

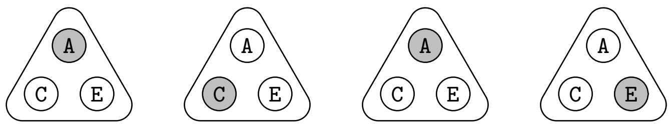
(b) Wenn der Code mit `A` beginnt, so gibt es gemäss (a) genau 6 verschiedene Codes. Und ebenso bei den Codes die mit `E` bzw. `C` beginnen. Folglich gibt es $4 \cdot 6 = \underline{\underline{24}}$ verschiedene Codes.

Das neue Gerät `Tell-PhoneX` hat nur die Buchstaben `A`, `C` und `E`.



Der Code für das Entsperren ist immer noch vierbuchstabig. Daher muss er mindestens einen Buchstaben mehrfach enthalten. Zum Beispiel sind `A-C-A-E` oder `A-E-C-A` Codes, die den Buchstaben `A` zweimal, sowie `C` und `E` je genau einmal enthalten.

Die Abbildung zeigt das Eintippen des Codes `A-C-A-E`.



(c) Wie viele verschiedene Codes gibt es, bei denen der Buchstabe `A` *genau zweimal* vorkommt, und die beiden anderen Buchstaben `C` und `E` sind?

(c) Variante 1. Das Zeichen `A` positionieren:

`AA□□`, `A□A□`, `A□□A`, `□AA□`, `□A□A`, `□□AA`

Es gibt 6 Möglichkeiten. Für jede dieser Anordnungen gibt es zwei Möglickeiten, `E`, `C` zu setzen. Es gibt also insgesamt 12 verschiedene Codes.

Variante 2. Alle Möglichkeiten systematisch auflisten:

`AACE`, `AAEC`, `ACAE`, `AEAC`, `ACEA`, `AECA`

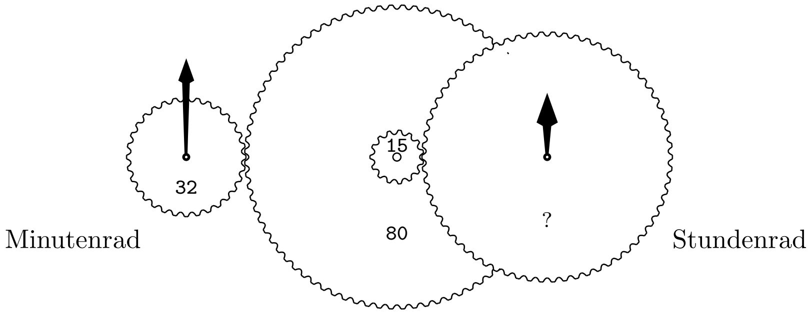
`CAAE`, `EAAC`, `CAEA`, `EACA`, `CEAA`, `ECAA`

Es sind 12 verschiedene Codes.

Aufgabe 8

Die untenstehende Abbildung zeigt das Räderwerk einer Uhr. Das linke Rad steuert den Minutenzeiger, das rechte Rad den Stundenzeiger.

Das Stundenrad wird durch das kleine Zahnrad mit 15 Zähnen angetrieben. Es ist fest mit dem grossen Zahnrad mit 80 Zähnen verbunden. Wenn dieses grosse Zahnrad genau eine vollständige Umdrehung macht, so macht das kleine ebenfalls genau eine vollständige Umdrehung.



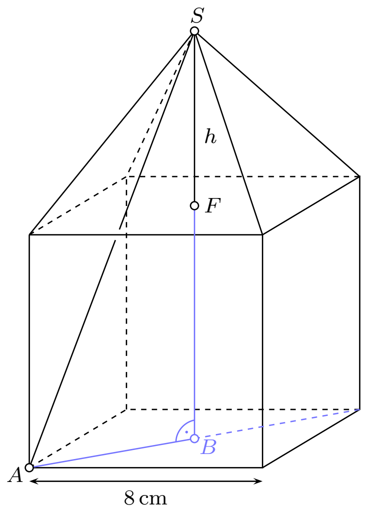
Wenn das Minutenrad 12 vollständige Umdrehungen macht, so dreht sich das Stundenrad genau ein Mal vollständig. Die zwei Zeiger zeigen dann zum ersten Mal wieder gleichzeitig senkrecht nach oben.

Berechne die Anzahl der Zähne des Stundenrads und notiere deine Rechnung.

Wenn das Minutenrad 12 Umdrehungen macht, so dreht sich das mittlere grosse Rad um $12 \cdot 32 = 384$ Zähne. Also macht das grosse Rad $\frac{384}{80} = 4.8$ Umdrehungen.

Das kleine, mit dem grossen Rad verbundene Zahnrad macht ebenfalls 4.8 Umdrehungen. Dies entspricht $15 \cdot 4.8 = 72$ Zähnen. Folglich muss das Stundenrad $\underline{\underline{72}}$ Zähne haben.

Aufgabe 9



Der abgebildete Körper ist ein Würfel mit einer aufgesetzten Pyramide. Die Strecke SF ist die Höhe h der Pyramide. Der Punkt F liegt genau in der Mitte der quadratischen Grundfläche der Pyramide.

Der Würfel hat die Kantenlänge $a = 8\,\text{cm}$.

Die folgenden beiden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

(a) Die Höhe der Pyramide misst $h = 6\,\text{cm}$. Berechne die Entfernung der Pyramidenspitze S zur Ecke A der Grundfläche des Würfels. Gib das Resultat auf zwei Stellen nach dem Komma an.

(b) Der gesamte Körper hat das Volumen $V = 768\,\text{cm}^3$. Welche Höhe h hat dann die Pyramide?

(a) Sei B die Mitte des Quadrats der Grundfläche des Würfels. Dann ist AB die halbe Diagonale des Quadrats mit der Seitenlänge 8 cm. Daher ist $AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 8\,\text{cm} = 4\sqrt{2}\,\text{cm} \approx 5.657\,\text{cm}$.

Die Strecke SB hat die Länge $SB = h + 8\,\text{cm} = 14\,\text{cm}$. Weil das Dreieck ABS rechtwinklig ist, gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$AS^2 \;=\; AB^2 + SB^2 \;=\; (4\sqrt{2}\,\text{cm})^2 + (14\,\text{cm})^2 \;=\; 228\,\text{cm}^2$$

Folglich ist $\underline{\underline{AS =}}\sqrt{228\,\text{cm}^2} \;\approx\; 15.09967\,\text{cm} \approx \underline{\underline{15.10\,\text{cm}}}$.

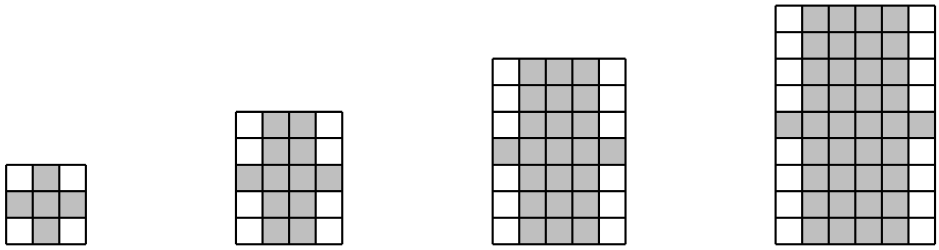
(b) Das Volumen V des Körpers ist die Summe des Würfelvolumens $V_W = (8\,\text{cm})^3 = 512\,\text{cm}^3$ und des Pyramidenvolumens $V_P = \frac{1}{3} \cdot (8\,\text{cm})^2 \cdot h = \frac{64\,\text{cm}^2}{3} \cdot h$. Es gilt also

$$V \;=\; V_W + V_P \;=\; 512\,\text{cm}^3 + \frac{64\,\text{cm}^2}{3} \cdot h \;=\; 768\,\text{cm}^3\,.$$

Dies ist die Bedingung an die Höhe h. Daraus ergibt sich zunächst $\frac{64\,\text{cm}^2}{3} \cdot h = 256\,\text{cm}^3$, und daraus $\underline{\underline{h = 12\,\text{cm}}}$.

Aufgabe 10

Betrachte die Figurenfolge.



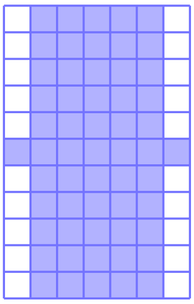
1. Figur 2. Figur 3. Figur 4. Figur

(a) Wie viele graue Quadraten enthält die 5. Figur?

(b) Gib eine Formel an, welche die Anzahl der grauen Quadrate in der n-ten Figur durch die Variable n ausdrückt.

(c) Welche Figur in dieser Folge enthält zum ersten Mal mehr als 5600 graue Quadrate? Finde die Antwort durch Probieren mit dem Taschenrechner.

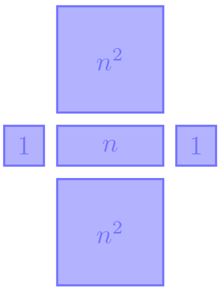
(a) Die 5. Figur ist:



Sie hat $\underline{\underline{57}}$ graue Quadrate.

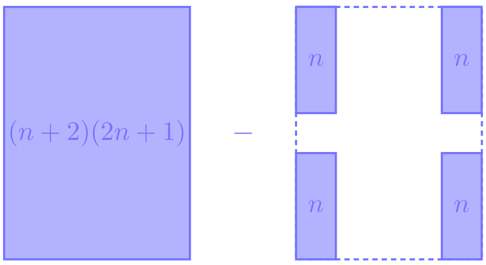
(b) Es gibt verschiedene Möglichkeiten:

Eine additive Zerlegung:



$\underline{\underline{2n^2 + n + 2}}$

Eine Zerlegung durch Subtraktion:



$\underline{\underline{(n+2)(2n+1) - 4n}}$

(c) Für $n = 20$ erhält man $2 \cdot 20^2 + 20 + 2 = 822$. Die zwei Quadrate tragen am meisten zur Summe bei. Es muss also $2n^2 \approx 5600$ oder $n^2 \approx 2800$ das heisst $n \approx \sqrt{2800} \approx 52.9$ gelten.

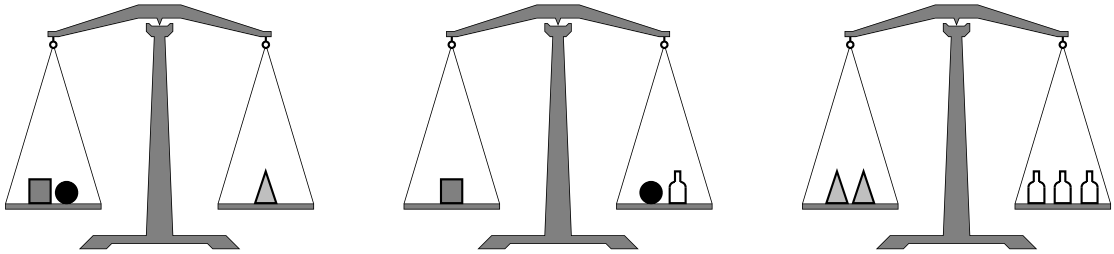
Für $n = 52$ erhält man $2 \cdot 52^2 + 52 + 2 = 5462 < 5600$.

Für $n = 53$ erhält man $2 \cdot 53^2 + 53 + 2 = 5673 > 5600$.

Die $\underline{\underline{\text{53. Figur}}}$ hat zum ersten Mal mehr als 5600 graue Quadrate.

Aufgabe 11

Die drei Waagen sind im Gleichgewicht:



Die Körper der gleichen Form haben dasselbe Gewicht.

(a) Welcher der Körper hat das grösste Gewicht? Kreuze die richtige Antwort an.

☐ ■ ☐ ● ☒ ▲ ☐

(b) Welcher der Körper hat das kleinste Gewicht? Kreuze die richtige Antwort an.

☐ ■ ☒ ● ☐ ▲ ☐

(c) Der leichteste Körper wiegt 1 kg. Welches Gewicht hat der schwerste Körper?

(a) Erste Waage: ▲ ist schwerer als ■ und ●. Die dritte Wage: ▲ ist schwerer als . Also hat ▲ das grösste Gewicht.

(b) Zweite Waage: ■ wiegt gleich viel wie ● und . Also hat ● oder das kleinste Gewicht. Ersetze in der ersten Waage ■ durch ●: Der Körper ▲ hat das gleiche Gewicht wie ●●.
Ersetze in der dritten Waage die beiden ▲ je durch ●●. Also wiegt ●●●● gleich viel wie .
Entferne in beiden Waagschalen je zwei . Also haben ●●●● dasselbe Gewicht wie . Daher ist ● der leichteste Körper.

(c) Der Körper ● wiegt 1 kg. Gemäss (b) wiegt dann 4 kg.
Die mittlere Waage: ■ wiegt 5 kg. Die erste Waage: ▲ wiegt $\underline{\underline{6\,\text{kg}}}$.

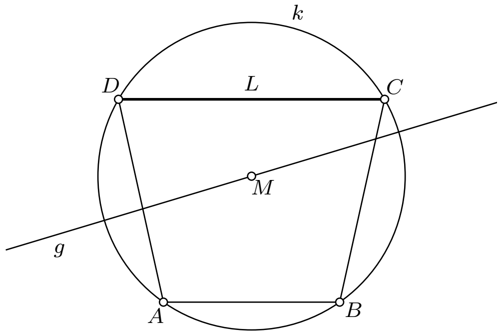
Aufgabe 12

Gegeben sind zwei Punkte A, B, eine Gerade g und eine Strecke der Länge L.

(a) Konstruiere denjenigen Kreis k, welcher seinen Mittelpunkt M auf g hat, sowie durch A und B verläuft.

(b) Konstruiere alle Trapeze $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften: Die Punkte C, D liegen ebenfalls auf dem Kreis k aus Aufgabe (a). Die Seite CD ist parallel zu AB, und CD hat die vorgegebene Länge L.

Überlege anhand der nebenstehenden Figur, wie die Konstruktion ausgeführt werden kann.



Konstruktion:

1. Zentrum M: Schnittpunkt der Mittelsenkrechte von AB mit g. Kreis k um M durch A.

2. Kreis um die Mitte von AB mit Radius $\frac{L}{2}$ schneiden mit der Gerade AB: Punkt F (und ein weiterer Punkt).

3. Die Senkrechte zur Gerade AB durch F schneiden mit dem Kreis k: Punkte C, C'.

4. Die Parallele zu AB durch C bzw. C' schneiden mit k: Punkt D bzw. D'.

5. Die Trapeze $ABCD$, $ABC'D'$.