

Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	4	4	4	4	3	4	3	4	4	3	4	4	45

Aufgabe 1 [4P]

Vereinfache folgende Terme soweit wie möglich:

(a) $-(3x - (y - 2x)) + 12x$

(b) $\frac{9t^2}{2xy} \cdot \frac{x^2}{6ty}$

(c) $\frac{5a - 2b}{6} - \frac{2a - b}{4}$

(d) $(0.01 \text{ km})^2 + 2000 \text{ dm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$

(a)

$$\begin{aligned} -(3x - (y - 2x)) + 12x &= -3x + (y - 2x) + 12x \\ &= -3x + y - 2x + 12x \\ &= \underline{\underline{7x + y}} \end{aligned}$$

[1 P]

(b)

$$\begin{aligned} \frac{9t^2}{2xy} \cdot \frac{x^2}{6ty} &= \frac{9t^2x^2}{12txy^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{3tx}{4y^2}}} \end{aligned}$$

[1 P]

(c)

$$\begin{aligned} \frac{5a - 2b}{6} - \frac{2a - b}{4} &= \frac{10a - 4b}{12} - \frac{6a - 3b}{12} \\ &= \frac{10a - 4b - (6a - 3b)}{12} \\ &= \frac{10a - 4b - 6a + 3b}{12} \\ &= \underline{\underline{\frac{4a - b}{12}}}. \end{aligned}$$

[1 P]

(d)

$$\begin{aligned} (0.01 \text{ km})^2 + 2000 \text{ dm}^2 &= (10 \text{ m})^2 + 2000 \cdot 0.01 \text{ m}^2 \\ &= 100 \text{ m}^2 + 20 \text{ m}^2 \\ &= \underline{\underline{120 \text{ m}^2}} \end{aligned}$$

[1 P]

Aufgabe 2 [4P](a) Löse die Gleichung nach k auf.

$$\frac{4k}{11} - \frac{2k+1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{12}{33} \cdot k$$

(b) Löse die Gleichung nach t auf.

$$1 + t^2 - t \cdot (1-t) = 2 \cdot (t^2 - t)$$

(a)

$$\begin{aligned}\frac{4k}{11} - \frac{2k+1}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{12}{33} \cdot k && | \text{ kürzen} \\ \frac{4k}{11} - \frac{2k+1}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{4k}{11} && | -\frac{4k}{11} \\ -\frac{2k+1}{3} &= \frac{2}{3} && | \cdot 3 \\ -(2k+1) &= 2 \\ -2k-1 &= 2 && | +2k-2 \\ -3 &= 2k && | \div 2 \\ k &= -\frac{3}{2} \\ \hline \hline\end{aligned}$$

[2 P]

(b)

$$\begin{aligned}1 + t^2 - t \cdot (1-t) &= 2 \cdot (t^2 - t) && | \text{ ausmultiplizieren} \\ 1 + t^2 - t + t^2 &= 2t^2 - 2t && | \text{ zusammenfassen} \\ 2t^2 - t + 1 &= 2t^2 - 2t && | -2t^2 \\ -t + 1 &= -2t && | +2t-1 \\ t &= -1 \\ \hline \hline\end{aligned}$$

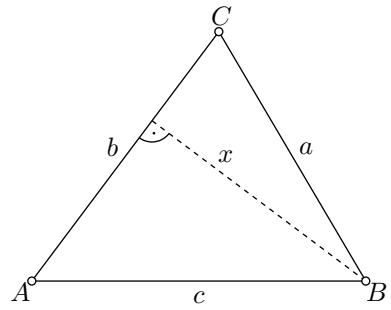
[2 P]

Aufgabe 3 [4P]

Bei einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c kann der Flächeninhalt mit der Formel

$$F = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)}$$

berechnet werden.



Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 13$, $b = 14$ und $c = 15$.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit der oben angegebenen Formel.
- Berechne den Abstand x der Ecke B von der Seite b .

(a) Einsetzen von $a = 13$, $b = 14$ und $c = 15$ ergibt

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(-13 + 14 + 15)(13 - 14 + 15)(13 + 14 - 15)(13 + 14 + 15)} = \frac{\sqrt{16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 42}}{4} = \underline{\underline{84}} \quad [2 \text{ P}]$$

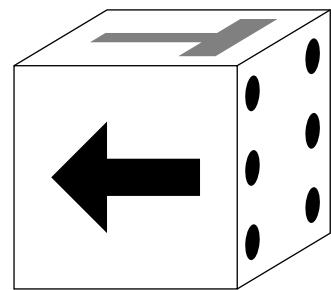
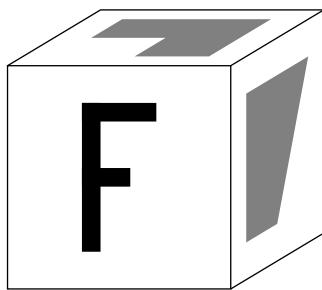
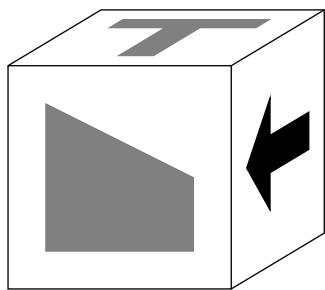
(b) Der Abstand x von B zur Seite b ist die Höhe h_b . Daher lautet der Flächeninhalt

$$F = \frac{b \cdot x}{2} = \frac{14x}{2} = 7 \cdot x. \quad [1 \text{ P}]$$

Also ist $7x = 84$ und somit $\underline{\underline{x}} = \frac{84}{7} = \underline{\underline{12}}$. [1 P]

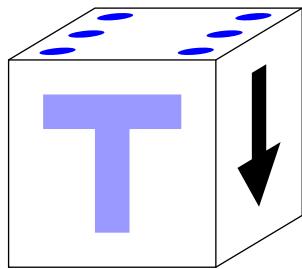
Aufgabe 4 [4P]

Das folgende Bild zeigt drei Ansichten ein und desselben Würfels:

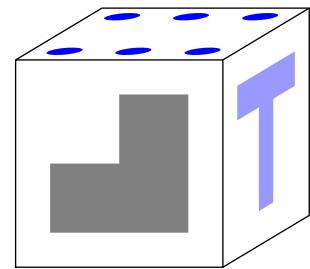


Dieser Würfel wird in weiteren zwei Positionen dargestellt. Zeichne die restlichen zwei sichtbaren Seiten des Würfels:

(a)



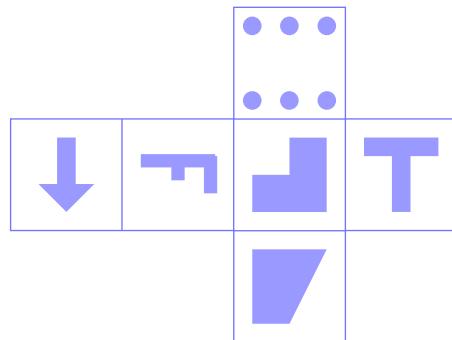
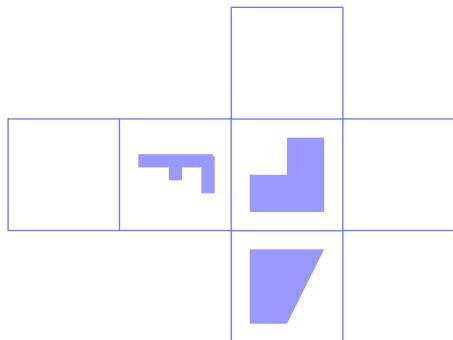
(b)



(a) Dreht man die linke Lage so, dass  die Grundfläche wird, so wird ersichtlich, dass  die Vorderseite ist. Die dritte Stellung geht aus der ersten durch eine Rotation hervor. Daher ist das Symbol  die Rückseite von , und somit die obere Fläche in der Stellung von Aufgabe (a). [2 P]

(b) Von Vorteil ist, ein Würfelnetz zu zeichnen. Das linke Netz ergibt sich aufgrund der mittleren Stellung. Die dritte Stellung geht aus der ersten durch eine Rotation hervor. Daher ist das Symbol  die Rückseite von . Damit erhält man die Lage von  und  im Würfelnetz,

sowie die Lösung der Aufgabe (b).



Das Symbol  ist nur der Vollständigkeit halber noch im Würfelnetz gezeichnet.

Aufgabe 5 [3P]

- (a) Es gibt Zahlen n , welche die folgende Eigenschaft erfüllen:

Der ggT von 8 und n ist gleich 4.

Die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft lautet $n = 4$.

Welches ist die nächst grösse Zahl n , welche ebenfalls diese Eigenschaft erfüllt?

- (b) Es gibt Zahlen n , welche die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

Der ggT von 8 und n ist gleich 4.

Der ggT von 27 und n ist gleich 9.

Der ggT von 25 und n ist gleich 5.

Die kleinste Zahl n mit diesen drei Eigenschaften lautet $n = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$.

Welches ist die nächst grösse Zahl n , welche ebenfalls diese drei Eigenschaften erfüllt?

Dass der ggT von n mit 8 gleich 4 ist, bedeutet, dass die Zahl n in der Primfaktorzerlegung zwei Primfaktoren 2 hat. Die Zahl ist also von der Form $n = 2 \cdot 2 \cdot k$ mit einem k , das nicht durch 2 teilbar ist. Für $k = 1$ erhält man die kleinste Zahl $n = 4$. Für $k = 3$ erhält man $\underline{\underline{n = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12}}$.

[1 P]

(b) Die erste Eigenschaft bedeutet wieder, dass die Primfaktorzerlegung von n von der Form $n = 2 \cdot 2 \cdot k$, mit einem k , das nicht durch 2 teilbar ist. Nimmt man die zweite Eigenschaft hinzu, so bedeutet dies, dass n auch zwei Primfaktoren 3 haben muss. Daher ist $n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot k$ mit einem k , das sich weder durch 2 noch durch 3 teilen lässt. Nimmt man schliesslich noch die dritte Eigenschaft hinzu, so sieht man, dass in der Primfaktorzerlegung von n ausserdem noch ein Faktor 5 auftreten muss. Daher ist n von der Form

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k,$$

mit einem k , das weder durch 2, 3 noch durch 5 teilbar ist. Für $k = 1$ erhält man $n = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$ die kleinste Zahl mit diesen Eigenschaften. Für die nächst grösse solche Zahl sucht man das nächst grösse k , welches nicht durch 2, 3, 5 teilbar ist. Dies ist $k = 7$. Somit ist die nächst grösse Zahl n mit den angegebenen Eigenschaften gleich $\underline{\underline{n = 4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 1260}}$.

[2 P]

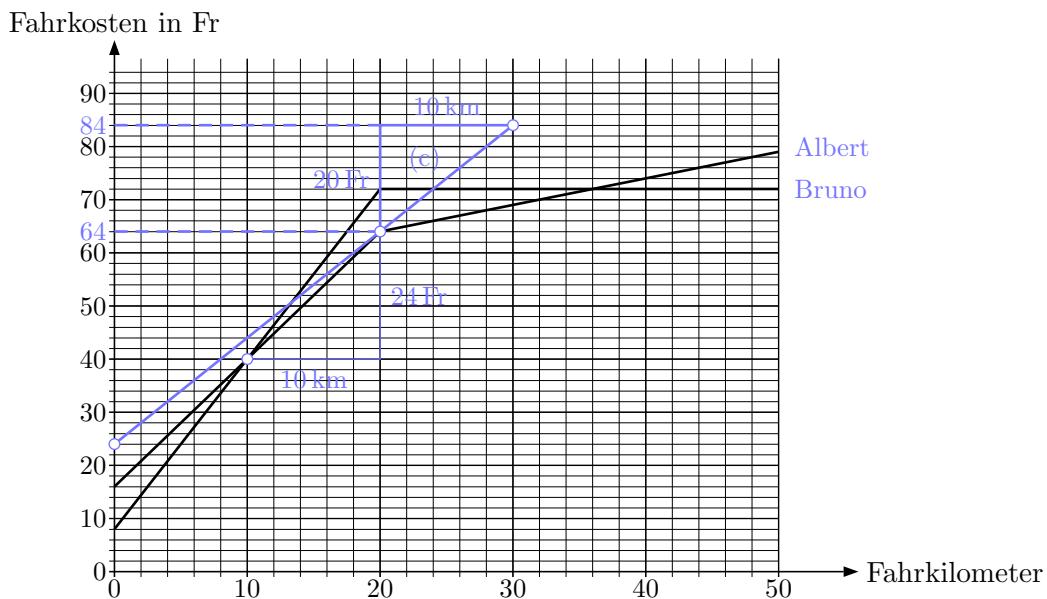
Aufgabe 6 [4P]

Für eine Taxifahrt bezahlt man eine Grundtaxe. Danach bezahlt man pro Fahrkilometer zusätzlich einen Betrag. Diesen Preis pro Kilometer nennt man den *Tarif*.

Albert und Bruno bieten Taxifahrten bis 50 km an. Ihre Grundtaxen und ihre Tarife sind in der folgenden Tabelle vermerkt (wobei ein Eintrag fehlt).

	Grundtaxe	Tarif bis 20 km	Tarif ab 20 km bis 50 km
Albert	16 Fr	?	0.5 Fr/km
Bruno	8 Fr	3.2 Fr/km	keine weiteren Kosten

Die Fahrkosten sind in der folgenden Graphik dargestellt. Allerdings wurde nicht angegeben, welcher Graph zu welchem Taxifahrer gehört.



- (a) Welchen Tarif verlangt Albert für eine Fahrt bis 20 km?
- (b) Drücke die Fahrkosten, die man bei Bruno bis 20 km zu bezahlen hat, durch die Fahrkilometer x aus.
- (c) Claudio, ein dritter Taxifahrer, bietet auch Taxifahrten an. Er erhebt ebenfalls eine Grundtaxe und der Fahrgast bezahlt zusätzlich 2 Fr/km. Eine Fahrt von 20 km kostet bei ihm gleich viel wie bei Albert.

Zeichne den Verlauf der Fahrkosten von Claudio bis zu maximal 30 Fahrkilometer in die obige Graphik ein.

- (a) In der Graphik liest man ab, dass Albert für (zum Beispiel) 10 Fahrkilometer 24 Fr verlangt. Dies ergibt einen Tarif von 2.4 Fr/km. [1 P]
- (b) Pro Fahrkilometer müssen 3.20 Fr. bezahlt werden. Bei x Fahrkilometer ergibt sich so $3.2 \cdot x$. Hinzu kommt noch die Grundtaxe von 8 Fr. Der Preis P bei x Fahrkilometern berechnet sich also so: $P(x) = 3.2 \cdot x + 8$. [1 P]
- (c) Die Kosten für 20 km lauten gemäß Graphik 64 Fr. Bei einem Tarif von 2 Fr/km kosten 30 Fahrkilometer $64 + 10 \cdot 2 = 84$ Fr. Der Graph ist die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte im Diagramm. [2 P]

Aufgabe 7 [3P]

Im Hinterwald leben 6 Bewohner. Einige sind Elfen, die anderen sind Zwerge. Elfen sagen immer die Wahrheit, Zwerge lügen immer. Ein Besucher stellt jedem dieser 6 Bewohner die gleiche Frage: "Wie viele Zwerge leben hier?".

Der erste Bewohner antwortet: "Mindestens einer."

E

Der zweite Bewohner antwortet: "Mindestens zwei."

E

Der dritte Bewohner antwortet: "Mindestens drei."

E

Der vierte Bewohner antwortet: "Mindestens vier."

Z

Der fünfte Bewohner antwortet: "Mindestens fünf."

Z

Der sechste Bewohner antwortet: "Mindestens sechs."

Z

Notiere jeweils im leeren Feld neben der Antwort ein E oder ein Z, je nachdem ob eine Elfe oder ein Zwerg geantwortet hat.

Wenn der erste ein Zwerg wäre, so gäbe es mindestens einen Zwerg, was einer wahren Aussage entsprechen würde. Weil aber Zwerge lügen, kann der erste kein Zwerg sein. Also ist der erste Bewohner eine Elfe.

Wenn die sechste eine Elfe wäre, so gäbe es von den sechs Bewohner mindestens sechs Zwerge. Es wären dann aber lauter Zwerge im Hinterwald. Daher kann der sechste Bewohner keine Elfe sein, sondern muss ein Zwerg sein. [1 P]

Wenn der zweite ein Zwerg wäre, so gäbe es mindestens zwei Zwerge (der sechste und der zweite), was einer wahren Aussage entsprechen würde. Weil aber Zwerge lügen, kann der zweite kein Zwerg sein. Also ist der zweite Bewohner eine Elfe.

Jetzt weiss man, dass höchstens vier Zwerge im Hinterwald leben. Wenn die fünfte eine Elfe wäre, so gäbe es mindestens fünf Zwerge, was nicht sein kann. Also muss der fünfte Bewohner ein Zwerg sein. [1 P]

Wenn der dritte ein Zwerg wäre, so gäbe es mindestens drei Zwerge (der sechste, fünfte und der dritte), was einer wahren Aussage entsprechen würde. Weil aber Zwerge lügen, kann der dritte kein Zwerg sein. Also ist der dritte Bewohner eine Elfe.

Jetzt weiss man, dass höchstens drei Zwerge im Hinterwald leben. Daher ist die vierte Aussage falsch, und somit der vierte ein Zwerg. [1 P]

Aufgabe 8 [4P]

Gegeben sind zwei Punkte A, B , eine Gerade g und eine Strecke der Länge a .

- (a) Konstruiere den Punkt M auf g so, dass die Strecken AM und BM gleich lang sind.

Für die folgende Teilaufgabe benötigst du den Punkt M aus der Konstruktion von (a).

- (b) Konstruiere alle Punkte C mit den folgenden Eigenschaften:

Die Strecke BC hat die Länge a . Das Dreieck AMC ist gleichschenklig und hat die Spitze in M .

Die Korrektheit der Konstruktion muss zweifelsfrei erkennbar sein.

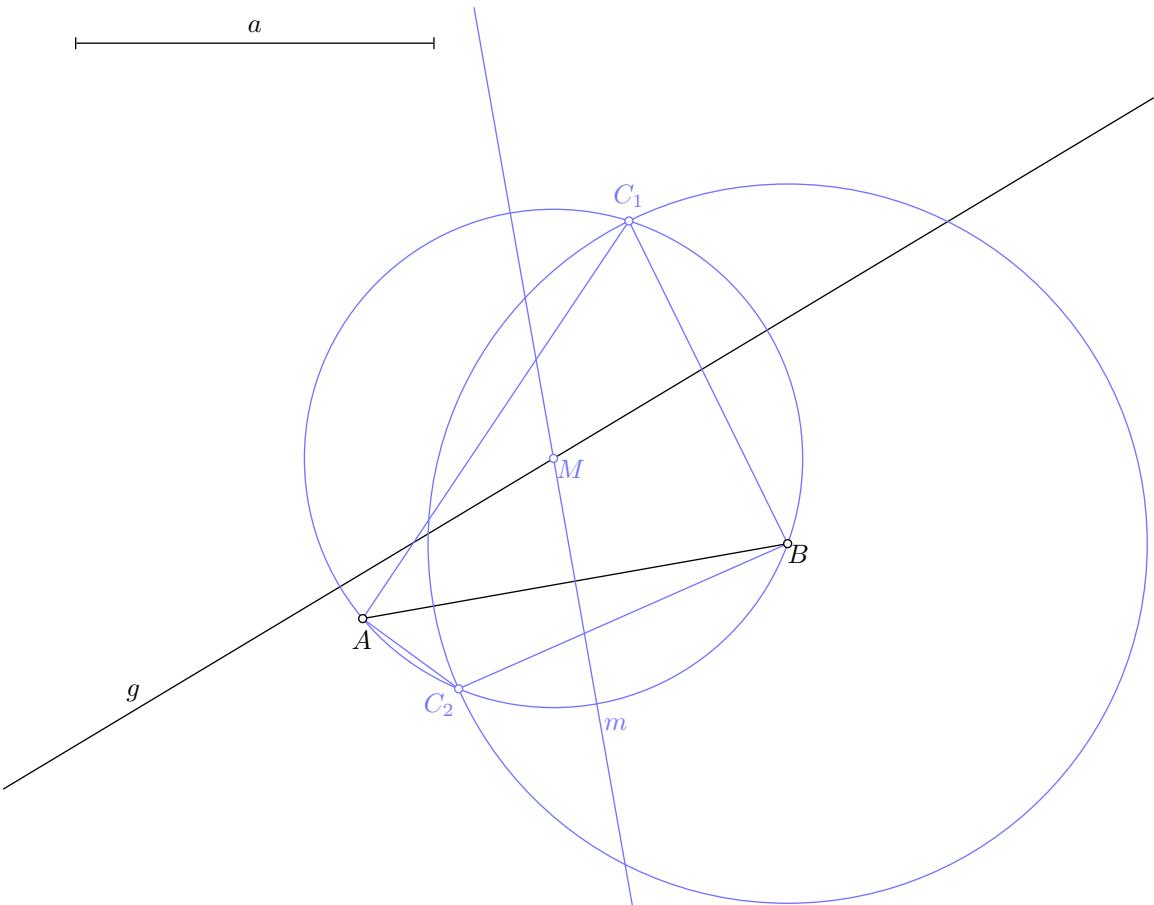
Eine Skizze kann hilfreich sein!

Konstruktion:

[1 P]

- (a) M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit g .

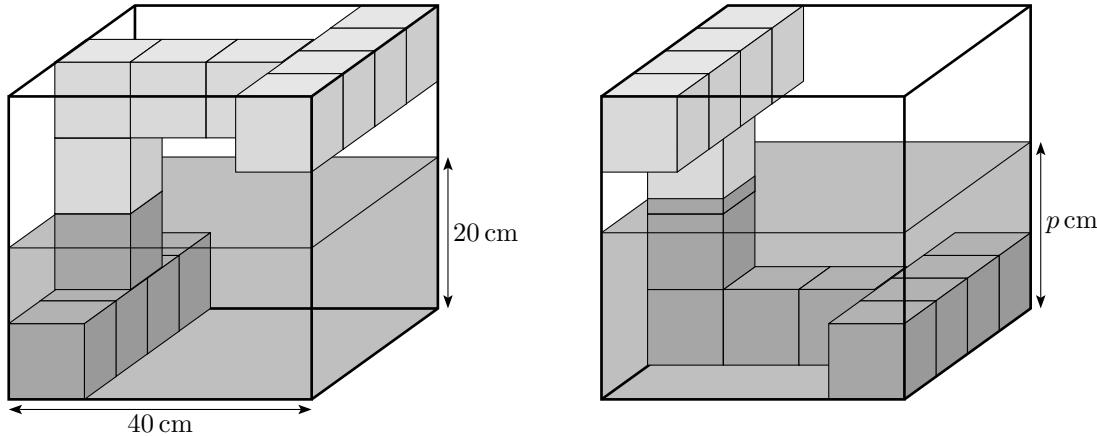
- (b) Die Punkte C_1, C_2 sind die Schnittpunkte der Kreise um B mit Radius a und des Kreises um M mit Radius $MA = MB$. [3 P]



Aufgabe 9 [4P]

In einem hohlen Plexiglaswürfel ist ein metallener Würfelkörper fest eingebaut. Der Metallkörper ist aus lauter gleich grossen Würfelchen zusammengesetzt. Der Plexiglaswürfel hat die Kantenlänge 40 cm.

Der Plexiglaswürfel ist teilweise mit Wasser gefüllt. Der Pegelstand ist auf der Höhe von 20 cm (linke Figur).



Der Plexiglaswürfel wird umgedreht, sodass die linke Seitenfläche zur Grundfläche wird (rechte Figur).

(a) Berechne das Volumen des Wassers.

(b) Berechne den Pegelstand p beim umgedrehten Plexiglaswürfel.

(a) Ein kleiner Teilwürfel des Körpers hat die Seitenlänge $40 \text{ cm} : 4 = 10 \text{ cm}$, und somit das Volumen 1000 cm^3 .

Im Wasser liegen 5 Teilwürfel, dessen Volumen $5 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 5000 \text{ cm}^3$ ist. Das Wasservolumen beträgt folglich $V = (40 \text{ cm})^2 \cdot 20 \text{ cm} - 5000 \text{ cm}^3 = 27'000 \text{ cm}^3$. [1 P]

(b) Bei der zweiten Lage liegen in der ersten Schicht 7 Teilwürfelchen im Wasser. Das Wasservolumen in der ersten Schicht ist demnach $V_1 = (40 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} - 7 \cdot 5000 \text{ cm}^3 = 9000 \text{ cm}^3$. [1 P]

Das Wasservolumen in der zweiten Schicht beträgt $V_2 = V - V_1 = 18'000 \text{ cm}^3$. Es ist das Volumen eines Prismas mit der Grundfläche $(40 \text{ cm})^2 - (10 \text{ cm})^2 = 1500 \text{ cm}^2$ und der Höhe x . Die Höhe x des Prismas ist demnach $x = \frac{18'000 \text{ cm}^3}{1500 \text{ cm}^2} = 12 \text{ cm}$. [2 P]

Der Pegelstand misst folglich $p = 10 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$.

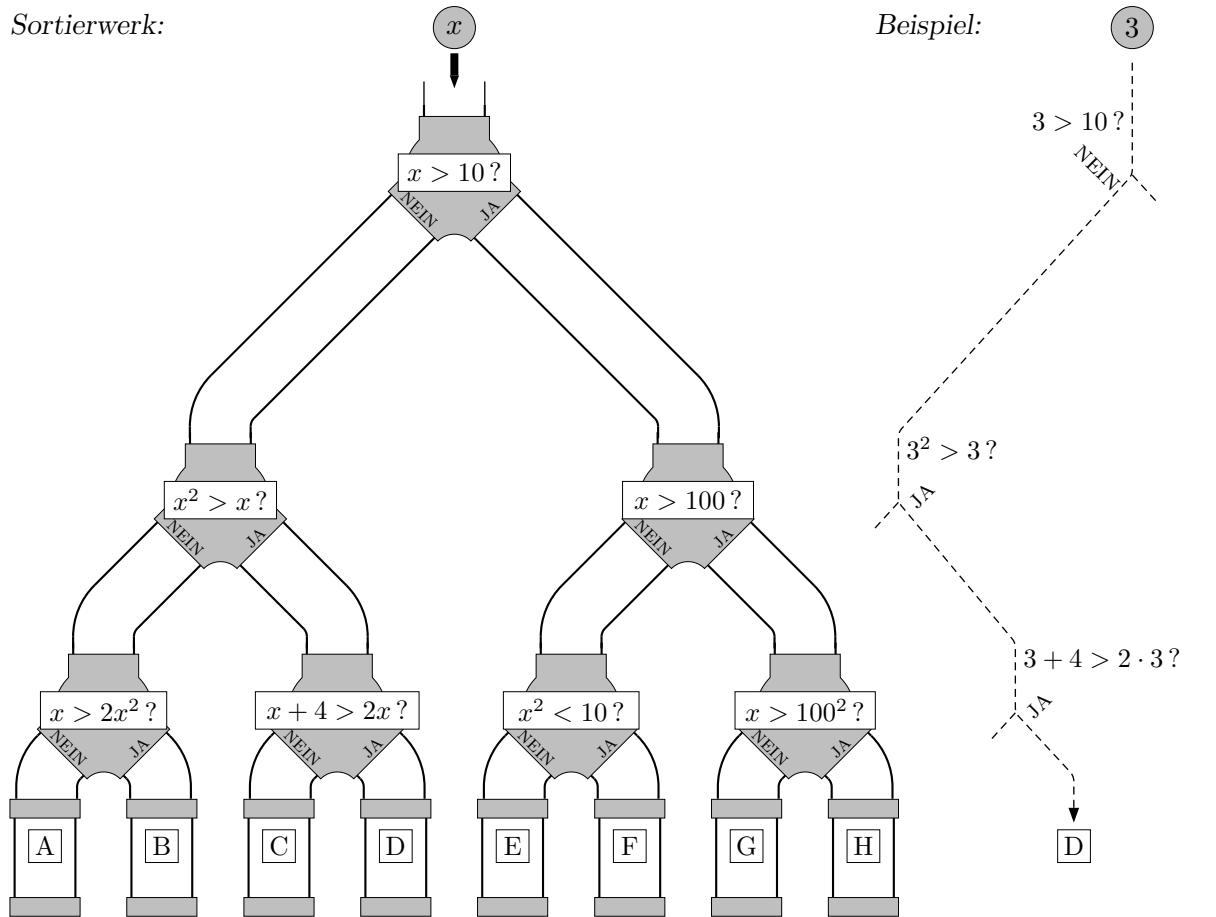
Nimmt man die Figur als korrekt an, so erhält man für das Wasservolumen in der unteren Würfelhälfte: $V_1 = 40^2 \cdot 20 - 8 \cdot 10^3 = 24'000 \text{ cm}^3$. Das Restvolumen des Wassers ist dann $V_2 = V - V_1 = 3'000 \text{ cm}^3$. Der Restkörper ist ein Prisma mit der Grundfläche $40^2 - 10^2 = 1500 \text{ cm}^2$ und der Höhe x . Die Höhe x des Prismas ist demnach $x = \frac{3000 \text{ cm}^3}{1500 \text{ cm}^2} = 2 \text{ cm}$.

Der Pegelstand misst folglich $p = 20 + 2 = 22 \text{ cm}$.

Aufgabe 10 [3P]

Zahlenmeister Zuse hat ein Sortierwerk erstellt. Lässt man oben eine Kugel mit einer Zahl x hineinfallen, so wird diese in eine der 8 Schächte A bis H sortiert.

Sortierwerk:



Beispiel:

(3)

$$3 > 10 ?$$

NEIN

$$3^2 > 3 ?$$

JA

$$3 + 4 > 2 \cdot 3 ?$$

JA

D

Ist zum Beispiel $x = 3$, so wird die Kugel in den Schacht D sortiert, wie das obige rechts platzierte Beispiel illustriert.

- (a) In welchem Schacht landet die Zahl $x = 0.6$?
- (b) Gib alle ganzen Zahlen an, die in den Schacht C fallen.
- (c) In einen der Schächte E, F, G oder H kann keine Zahl fallen. Welcher Schacht ist das?

(a) $0.6 > 10$ ist falsch, daher geht die Kugel in der ersten Weiche nach links. Da $0.6^2 = 0.36$, so ist $0.6^2 > 0.6$ wieder falsch und die Kugel geht auch in der zweiten Weiche nach links. Da $2 \cdot 0.6^2 = 2 \cdot 0.36 = 0.72$, so ist $0.6 > 2 \cdot 0.6^2 = 0.72$ nochmal falsch. Die Kugel gelangt also in den Schacht A.

[1 P]

(b) Damit eine Kugel in den Schacht C fällt, muss die Bedingung $x > 10$ falsch sein. Dies bedeutet $x \leq 10$. Nun betrachten wir die dritte Weiche. Es muss $x + 4 > 2x$ falsch sein. Dies bedeutet $x + 4 \leq 2x$. Ist x negativ, so ist auch $2x$ negativ und daher $x + 4 \leq 2x$ nicht möglich. Somit muss $x \geq 0$ gelten. Die Ungleichung $x + 4 \leq 2x$ ist für $x = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ erfüllt. Nun betrachten wir die zweite Weiche: $x^2 > x$. Für alle diese Zahlen ist diese Ungleichung erfüllt. Daher gilt: Die Zahlen $x = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ werden in den Schacht C sortiert.

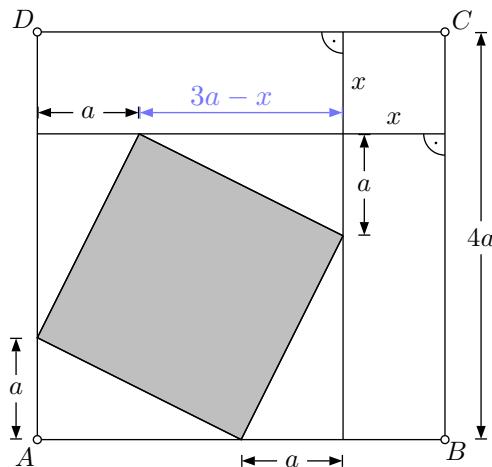
[1 P]

(c) In den Schacht E kann die Kugel $x = 50$ fallen, in Schacht G die Kugel $x = 200$ und in Schacht H die Kugel $x = 20000$. In Schacht F kann keine Kugel fallen, da die erste Weiche nur Kugeln x durchlässt, die $x > 10$ erfüllen, die dritte Weiche jedoch nur Kugeln, die $x^2 < 10$, also $x < \sqrt{10}$ erfüllen. Dies ist für kein x erfüllbar.

[1 P]

Aufgabe 11 [4P]

Abgebildet ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $4a$. Das rechte obere Quadrat hat die Seitenlänge x .



- (a) Drücke den Flächeninhalt des grau schraffierten Quadrats durch a und x aus.
- (b) Für $a = 2 \text{ cm}$ und x (in cm) lautet der Flächeninhalt F (in cm^2) des grau schraffierten Quadrats

$$F = x^2 - 12x + 40.$$

Ermittle durch Probieren mit dem Taschenrechner die Länge x auf eine Stelle nach dem Komma genau, sodass $F = 14.24 \text{ cm}^2$ ist.

- (a) Die Seite des schraffierten Quadrats ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und $4a - a - x = 3a - x$. Nach Pythagoras ist der Inhalt F des grau schraffierten Hypotenosenquadrat gleich der Summe dieser Kathetenquadrate. Daher ist

$$\underline{\underline{F = a^2 + (3a - x)^2}} = x^2 - 6ax + 10a^2 \quad [2 \text{ P}]$$

Zweiter Lösungsweg. Fasst man den Inhalt des schraffierten Quadrats als Differenz des Inhalts des linken unteren Quadrats mit der Seitenlänge $4a - x$ und den vier rechtwinkligen Dreiecken auf, so erhält man

$$F = (4a - x)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a(3a - x) = (4a - x)^2 - 2a(3a - x)$$

- (b) Die Länge x ist kleiner als die Quadratseitenlänge $4a = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}$. Mit probieren findet man $x = 2.8 \text{ cm}$ [2 P]

Bemerkung. Die zweite Lösung $x = 9.2 \text{ cm}$ der Gleichung kommt wegen $x \leq 8$ nicht in Frage.

Aufgabe 12 [4P]

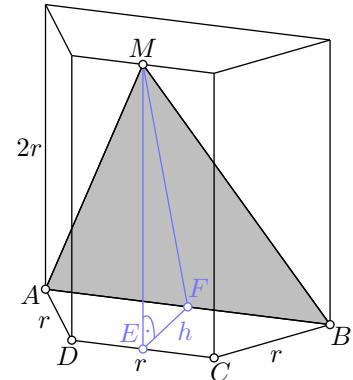
Die Grundfläche $ABCD$ des abgebildeten Prismas ist ein Trapez mit den parallelen Seiten AB und CD .

Angaben zur trapezförmigen Grundfläche:

Die Schenkel $BC = AD$, sowie die Seite CD haben die Länge $r = 5 \text{ cm}$. Das Trapez hat die Höhe $h = 4 \text{ cm}$.

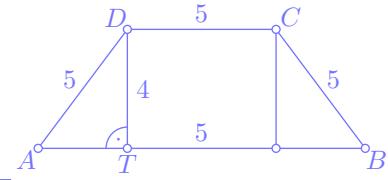
Weitere Angaben zum Prisma:

Das Prisma hat die Höhe $2r = 10 \text{ cm}$.



- (a) Berechne die Länge der Seite AB der trapezförmigen Grundfläche.
 (b) Der Punkt M ist die Mitte der oberen vorderen Kante. Berechne den Flächeninhalt des grau schraffierten gleichschenkligen Dreiecks ABM .

(a) Das Trapez setzt sich zusammen aus einem Rechteck mit den Seitenlängen $r = 5 \text{ cm}$ und $h = 4 \text{ cm}$, sowie zwei rechtwinkligen Dreiecken mit der Kathete $h = 4 \text{ cm}$ und der Hypotenuse $r = 5 \text{ cm}$.



[1 P]

Die Strecke AT hat nach Pythagoras die Länge $AT = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Folglich ist $\underline{\underline{AB}} = 2 \cdot AT + 5 = 11$. Mit Einheit $\underline{\underline{AB}} = 11 \text{ cm}$.

[1 P]

(b) Seien E die Mitte von DC und F die Mitte von AB . Dann ist das Dreieck MEF rechtwinklig mit den Katheten $ME = 2r = 10 \text{ cm}$ und $EF = h = 4 \text{ cm}$. Die Hypotensuse MF ist die Höhe des Dreiecks ABM . Sie hat die Länge

$$MF = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2 \cdot \sqrt{29} \approx 10.77$$

[1 P]

Der Inhalt des Dreiecks ABM lautet folglich $F = \frac{AB \cdot MF}{2} = 11 \cdot \sqrt{29} \approx 59.237$. Mit Einheit $\underline{\underline{F}} \approx 59.2 \text{ cm}^2$.

[1 P]