Mathematik
Aufnahmeprüfung 2021

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	3	4	3	4	3	4	3	3	4	4	43

Aufgabe 1 [4P]

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen.

(a) $(-2) \cdot (2a - 6 - 9a + 1)$

(b) $-(4x^2 - 2x + 1) - 2x \cdot (x + 1)$

Schreibe das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch.

(c) $\dfrac{t+6}{3} - \dfrac{t+8}{4} + \dfrac{t}{6}$

(d) $\dfrac{4x^5y^2}{3z^4} \cdot \dfrac{9z}{8x^4y^2}$

(a) $$\begin{aligned}(-2) \cdot (2a - 6 - 9a + 1) &= (-2) \cdot (-7a - 5) \\ &= \underline{\underline{14a + 10}}\end{aligned}$$ **[1 P]**

(b) $$\begin{aligned}-(4x^2 - 2x + 1) - 2x \cdot (x + 1) &= -4x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - 2x \\ &= \underline{\underline{-6x^2 - 1}}\end{aligned}$$ **[1 P]**

(c) $$\begin{aligned}\frac{t+6}{3} - \frac{t+8}{4} + \frac{t}{6} &= \frac{t}{3} + \cancel{2} - \frac{t}{4} - \cancel{2} + \frac{t}{6} \\ &= \frac{4t}{12} - \frac{3t}{12} + \frac{2t}{12} \\ &= \frac{3t}{12} \\ &= \underline{\underline{\frac{t}{4}}}\end{aligned}$$ **[1 P]**

(d) $$\begin{aligned}\frac{4x^5y^2}{3z^4} \cdot \frac{9z}{8x^4y^2} &= \frac{4x^5y^2 \cdot 9z}{3z^4 \cdot 8x^4y^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{3x}{2z^3}}}\end{aligned}$$ **[1 P]**

Aufgabe 2 [4P]

(a) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten p auf.

$$p + p(1-p) - (1+p)p \;=\; -1 + 2(p - p^2)$$

(b) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten n auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$$\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{n}{4}\right) \;=\; \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2n}{3}\right)$$

(a)

$$\begin{aligned} p + p(1-p) - (1+p)p &= -1 + 2(p-p^2) & \\ p + p - p^2 - p - p^2 &= -1 + 2p - 2p^2 & \\ p - 2p^2 &= -1 + 2p - 2p^2 & \Big|\, -2p + 2p^2 \\ -p &= -1 & \Big|\, \cdot(-1) \\ \underline{\underline{p}} &\underline{\underline{= 1}} & \end{aligned}$$

[2 P]

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{n}{4}\right) &= \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2n}{3}\right) & \Big|\, \cdot 12 \\ 4\cdot\left(1-\frac{n}{4}\right) &= 3\cdot\left(1+\frac{2n}{3}\right) & \\ 4 - n &= 3 + 2n & \Big|\, +n-3 \\ 1 &= 3n & \Big|\, \div 3 \\ \underline{\underline{\frac{1}{3}}} &\underline{\underline{= n}} & \end{aligned}$$

[2 P]

Aufgabe 3 **[3P]**

Zwei ganze Zahlen a und b haben den grössten gemeinsamen Teiler 31. Die Zahl a liegt zwischen 180 und 200, und b liegt zwischen 240 und 380.

Bestimme die beiden Zahlen a und b.

31 ist eine Primzahl.

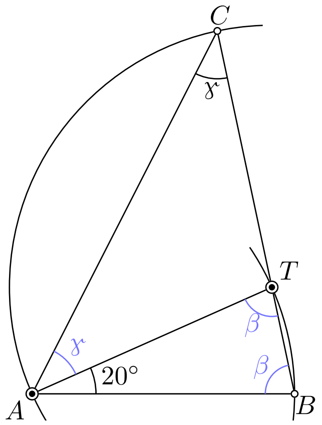
Es gilt $180 : 31 \approx 5.806$. Das einzige Vielfache von 31, das zwischen 180 und 200 liegt, ist $6 \cdot 31 = 186$, da $5 \cdot 31 = 155 < 180$ und $7 \cdot 31 = 217 > 200$ gilt. **[1 P]**

Wegen $240 : 31 \approx 7.742$ und $380 : 31 \approx 12.258$ muss die zweite Zahl von der Form $31 \cdot k$ mit $7 < k \leq 12$ sein. Weiter darf aber k weder durch 2 noch durch 3 teilbar sein, denn sonst hätte $31 \cdot k$ mit $a = 31 \cdot 6$ einen grösseren ggT als 31. Somit fallen 8, 9, 10 und 12 als Kandidaten für k weg. Es bleibt noch $k = 11$ übrig. Die zweite Zahl ist lautet also $31 \cdot 11 = 341$. **[2 P]**

Die zwei Zahlen sind $\underline{\underline{\text{186 und 341}}}$.

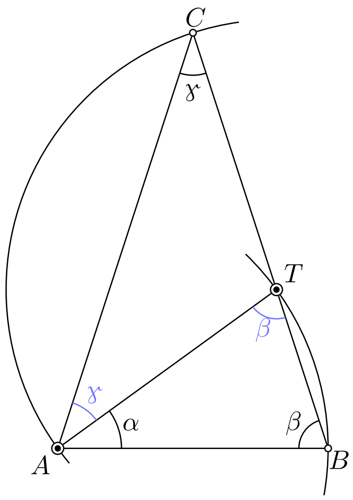
Aufgabe 4 [4P]

(a) Im Dreieck ABC sind A und T die Mittelpunkte der eingezeichneten Kreisbögen. Berechne den Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$.



(b) Jetzt ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Spitze bei C. Die Punkte A und T sind nach wie vor die Zentren von Kreisbögen. Berechne den Winkel α.

Hinweis: Drücke zuerst β und γ durch α aus und vereinfache fortlaufend die Terme soweit wie möglich.



(a) Weil das Dreieck BTA gleichschenklig ist, ist $\beta = 90° - 10° = 80°$. Wegen $\sphericalangle TAC = \gamma$ ist $\beta = 2\gamma = 80°$, und somit $\underline{\underline{\gamma = 40°}}$. **[2 P]**

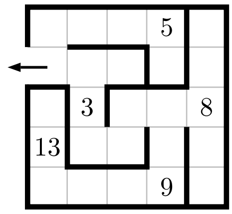
(b) Für den Winkel $\beta = \sphericalangle TBA = \sphericalangle ATB$ gilt $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$, weil das Dreieck BAT gleichschenklig ist. Sei γ der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks CAT. Dann ist $2\gamma = \beta$ bzw. $\gamma = \frac{\beta}{2}$. Damit das Dreieck ABC gleichschenklig ist, muss $\beta = \alpha + \gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$ sein. Aus dieser Eigenschaft erhält man

$$
\begin{aligned}
\alpha + \frac{\beta}{2} &= \beta && \Big| -\frac{\beta}{2} \\
\alpha &= \frac{\beta}{2} && \Big| \cdot 2 \\
2\alpha &= \beta = 90° - \frac{\alpha}{2} && \Big| \cdot 2 \\
4\alpha &= 180° - \alpha && \Big| +\alpha \\
5\alpha &= 180° && \Big| \div 5 \\
\underline{\underline{\alpha}} &\underline{\underline{= 36°}}
\end{aligned}
$$

[2 P]

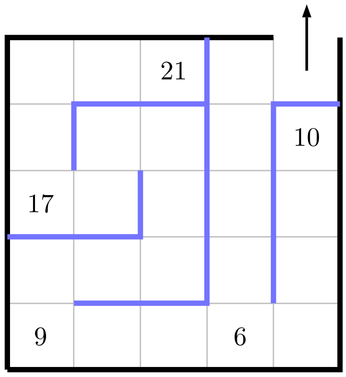
Aufgabe 5 [3P]

Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Labyrinth. Der Pfeil deutet den Ausgang an. Mit den Zahlen in den Feldern ist die kleinste Anzahl Schritte vermerkt, die man benötigt, um vom entsprechenden Feld aus das Labyrinth zu verlassen.

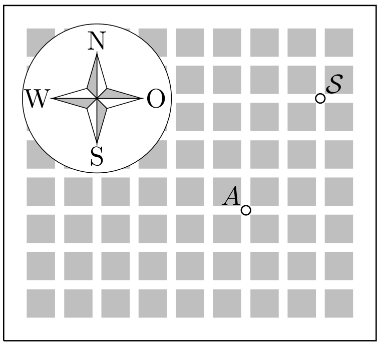


Beim folgenden Labyrinth fehlen die Wände. Es ist aber in einigen Feldern die kleinste Anzahl Schritte notiert, um von dort aus das Labyrinth zu verlassen.

Zeichne die Wände.



Aufgabe 6 [4P]



Die Abbildung zeigt den Ortsplan einer Stadt, deren Strassen alle rechtwinklig oder parallel zueinander verlaufen. Die Strassen grenzen quadratische Häuserblöcke ab.

Der Punkt A markiert die Strassenkreuzung, von welcher aus Anton zur Schule $\mathcal{S}$ marschiert. Er wählt immer einen kürzesten Schulweg, also entlang von genau 5 Häuserblöcken.

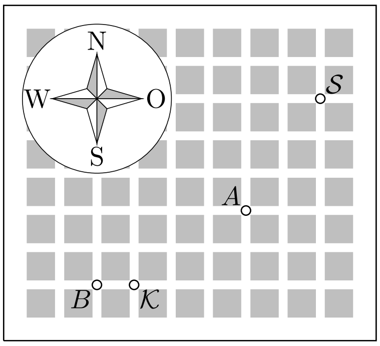
Gestern ging er beispielsweise zuerst zwei Häuserblöcke nach Osten, und danach drei Häuserblöcke nach Norden. Dieser Weg lässt sich kurz notieren als OONNN.

(a) Wenn Anton zuerst nach Osten läuft, so sind die vier Wege

OONNN, ONONN, ONNON und ONNNO

die kürzesten.

Notiere die sechs kürzesten Schulwege, wenn Anton zuerst nach Norden geht.



Antons Schulkamerad Ben wohnt etwas weiter weg von der Schule. Er geht zuerst auf einem kürzesten Weg zu Anton, welcher bei der Kreuzung A auf ihn wartet.

(b) Wie viele kürzeste Wege gibt es für Ben von B nach A, wenn er zuerst zum Kiosk $\mathcal{K}$ läuft?

(c) Wie viele kürzeste Wege gibt es für Ben insgesamt, um von B nach A zu gelangen?

(d) Ben läuft jeden Tag von B auf einem kürzesten Weg zu A, und trifft dort Anton. Danach gehen die beiden gemeinsam auf kürzestem Wege zur Schule $\mathcal{S}$.

Wie viele kürzeste Wege gibt es für Ben, wenn er auf diese Weise zur Schule $\mathcal{S}$ geht?

(a) NOONN, NONON, NONNO, NNOON, NNONO, NNNOO **[1 P]**

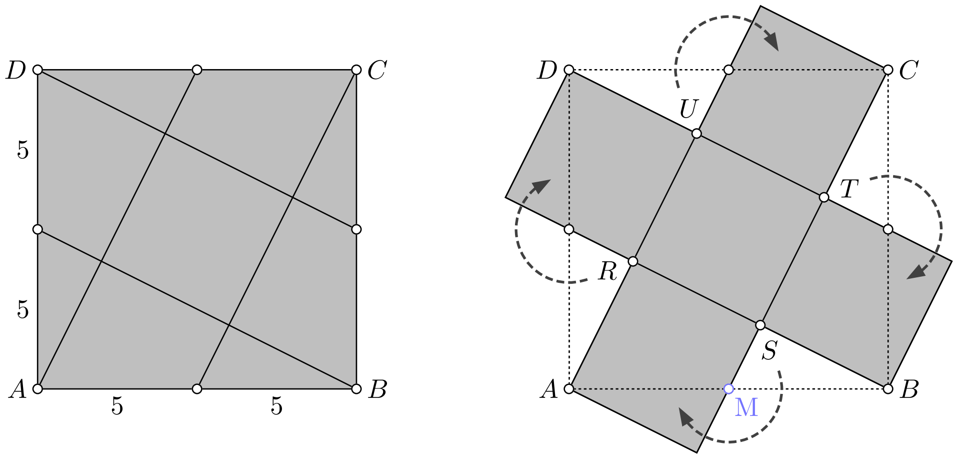
(b) Es ist die gleiche Situation wie in (a), wobei die Rolle von N und O vertauscht sind. Also sind es $4 + 6 = \underline{\underline{10}}$ kürzeste Wege. **[1 P]**

(c) Es sind noch die Anzahl kürzester Wege zu zählen, wenn Ben zuerst nach Norden geht. Es sind dies NOOOON, NOOONO, NOONOO, NONOOO, NNOOOO, also 5 kürzeste Wege. Insgesamt sind es demnach $10 + 5 = \underline{\underline{15}}$ kürzeste Wege. **[1 P]**

(d) Für jeden der 15 kürzesten Wege von B nach A gibt es 10 kürzeste Wege von A nach S. Folglich sind es insgesamt $15 \cdot 10 = \underline{\underline{150}}$ kürzeste Wege von B über A nach S. **[1 P]**

Aufgabe 7 **[3P]**

Bei einem Quadrat $ABCD$ wird jede Ecke mit einer Seitenmitte verbunden, so wie dies in der linken Figur dargestellt ist. Diese Linien unterteilen das Quadrat in vier Dreiecke, vier Trapeze und ein Quadrat in der Mitte.



Dreht man die vier Dreiecke je um 180° um eine Seitenmitte, so entsteht ein Kreuz aus 5 gleich grossen Quadraten (siehe die rechte Figur). Dieses graue Kreuz hat daher denselben Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$.

Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 10.

(a) Berechne die Seitenlänge des mittleren Quadrats $RSTU$.

(b) Berechne den Abstand, den S von der Seite AB hat.

(a) Das Quadrat hat den Flächeninhalt $10^2 = 100$.

Das Kreuz setzt sich aus 5 gleichen Quadraten zusammen. Ein einzelnes Quadrat hat daher den Flächeninhalt $\frac{1}{5} \cdot 100 = 20$. Dessen Seite hat somit die Länge $\underline{\underline{\sqrt{20} \approx 4.47}}$. **[1 P]**

(b) Seien M die Seitenmitte von AB und h der Abstand von S zu MB.
Das Dreieck BSM ist rechtwinklig bei S. Die Seitenlängen lauten

$$SB = \sqrt{20}, \qquad SM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \qquad \text{und} \qquad MB = 5$$

Berechnet man den Flächeninhalt dieses Dreieck als die Hälfte des Produkts der beiden Katheten, so erhält man die Zahl $\frac{1}{2} \cdot SB \cdot SM = 5$.
Andererseits hat das Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot MB \cdot h = \frac{5}{2} \cdot h$. Wegen $\frac{5}{2} \cdot h = 5$ muss $\underline{\underline{h = 2}}$ sein. **[2 P]**

Aufgabe 8 [4P]

Eine Viehherde besteht aus x Tieren. $\frac{3}{5}$ davon sind Schafe, die restlichen $\frac{2}{5}$ der Herde sind Ziegen. Als eine Seuche auftritt, erkranken $\frac{1}{6}$ der Schafe und $\frac{1}{8}$ der Ziegen, insgesamt 21 Tiere.

Aus wie vielen Tieren besteht die ganze Viehherde?

Stelle für die Beantwortung der Frage zuerst eine Gleichung für x auf.

Sei x die Anzahl Tiere der ganzen Viehherde. Dann gibt es $\frac{3}{5}x$ Schafe und $\frac{2}{5}x$ Ziegen. Erkrankt sind $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}x$ Schafe und $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5}x$ Ziegen. Somit erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}x + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5}x = 21.$$ **[2 P]**

Sie kann nun wie folgt nach x aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}x + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5}x &= 21 \\
\frac{3}{30}x + \frac{2}{40}x &= 21 && \mid \text{kürzen} \\
\frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x &= 21 && \mid \text{erweitern} \\
\frac{2}{20}x + \frac{1}{20}x &= 21 \\
\frac{3}{20}x &= 21 && \mid : 3 \cdot 20 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 140}}
\end{aligned}$$

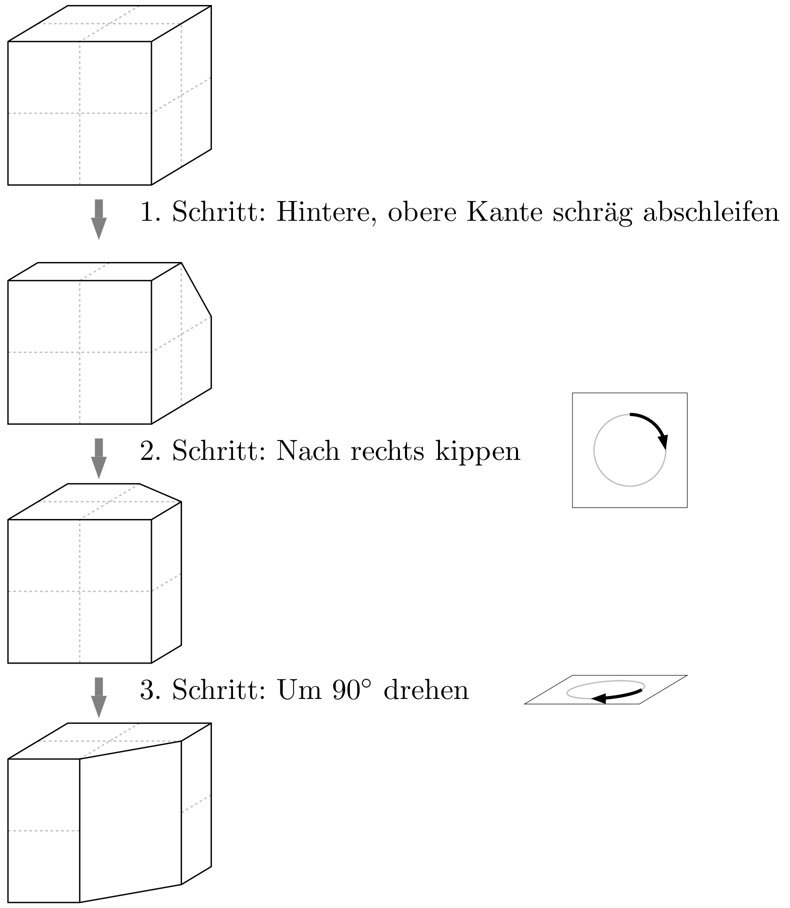
[2 P]

Die Viehherde besteht aus $\underline{\underline{140}}$ Tieren.

Aufgabe 9 [3P]

Ein Holzwürfel wird an drei seiner Kanten geschliffen. Dies wird in 9 Bearbeitungsschritten bewerkstelligt.

Im ersten Schritt wird die hintere obere Kante schräg abgeschliffen. Im zweiten Schritt wird der Körper nach rechts gekippt, und im dritten Schritt wird er um 90° gedreht. Die untenstehende Figurenfolge illustriert diesen Vorgang.

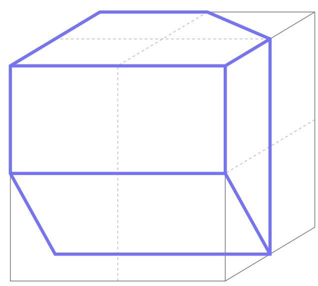


Diese drei Bearbeitungsschritte werden in genau dieser Reihenfolge wiederholt ausgeführt, also

4. Schleifen - 5. Kippen - 6. Drehen - 7. Schleifen - 8. Kippen - 9. Drehen - fertig

(a) Zeichne den Körper, nachdem der fünfte Bearbeitungsschritt erfolgt ist.

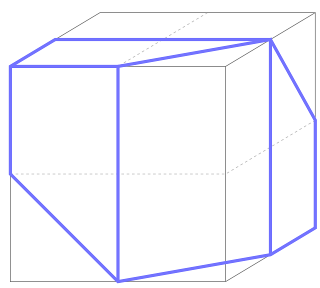
Die obere-hintere Würfelkante gelangt beim Kippen nach hinten-rechts.
Und die vordere-rechte Würfelkante wird nach vorne-unten bewegt.
Der Körper hat nach 5 Bearbeitungsschritten die nebenstehnde Form.



[1 P]

(b) Zeichne den Körper am Ende des 9. Bearbeitungsschritts.

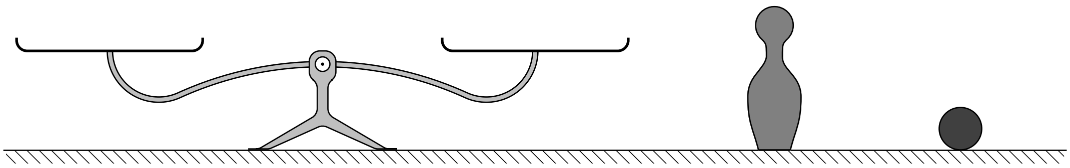
Nach einer Drehung gelangt die obere-linke Würfelkantne nach oben-hinten, wo sie geschliffen wird.
Diese obere-hintere Würfelkante gelangt beim Kippen und Drehen danach nach vorne-rechts.
Die vordere-untere Würfelkante bewegt sich nach Drehen-Kippen-Drehen nach der hinteren-oberen Würfelkante. Und die rechts-hintere Würfelkante gelangt nach Drehen-Kippen-Drehen in die untere-linke Würfelkante.
Bei diesen drei Kanten ist der Schliff zu zeichnen.



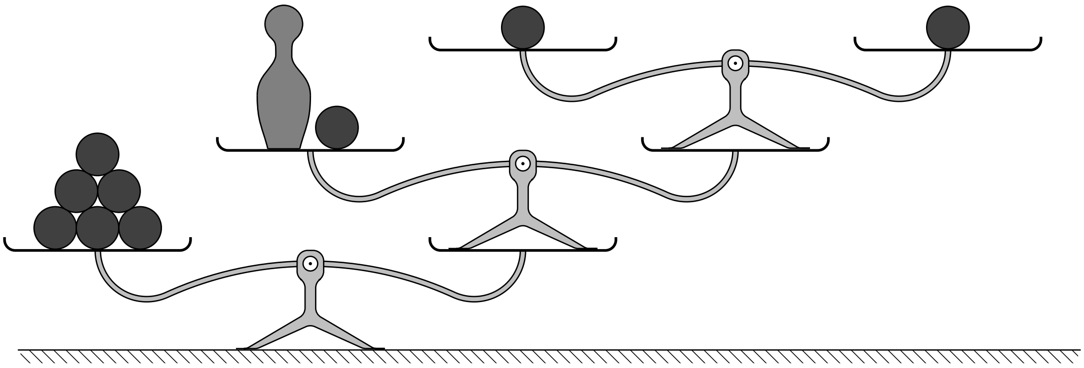
[2 P]

Aufgabe 10 [3P]

Wir betrachten drei Objekte: Waage, Kegel und Kugel



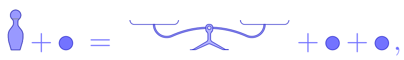
Drei dieser Waagen, 9 solcher Kugeln und ein Kegel können wie folgt ins Gleichgewicht gebracht werden:



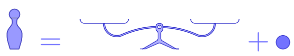
Das leichteste der drei Objekte wiegt 2 kg.

Bestimme aus diesen Angaben das Gewicht der drei Objekte.

Zuerst kann man die mittlere Waage im Gleichgewicht betrachten. Vergleicht man die linke und die rechte Seite, so ist



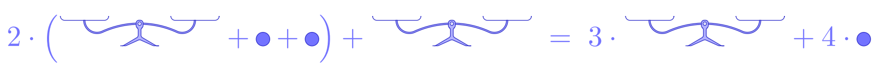
also



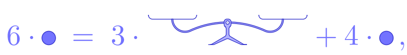
Daraus wird ersichtlich, dass der Kegel das schwerste Objekt ist. **[1 P]**

Bei der mittleren Waage kann man

Die untere Waage trägt daher auf der rechten Schale das Gewicht von



Weil sie auf der linken Seite $6 \cdot \bullet$ trägt, und im Gleichgewicht ist, muss



also

 **[1 P]**

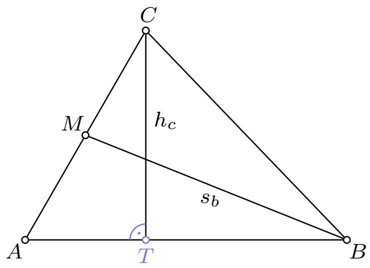
sein. Daraus wird ersichtlich, dass die Waage das leichteste Objekt ist, und somit 2 kg wiegt. Daraus ergibt sich das Gewicht von 3 kg für eine Kugel, und schliesslich 5 kg für den Kegel. Die Gewichte sind: Waage: 2 kg, Kugel: 3 kg und Kegel: 5 kg. **[1 P]**

Aufgabe 11 **[4P]**

Von einem Dreieck ABC kennt man die Punkte A und C, sowie die Längen der Höhe h_c und der Seitenhalbiernden $s_b = MB$.

Konstruiere alle Dreiecke ABC aus der gegebenen Seite AC, und den vorgegebenen Längen h_c und s_b.

Überlege anhand der nebenstehenden Figur, wie die Konstruktion ausgeführt werden kann.



Konstruktion:

1. Mitte M der Strecke AC.

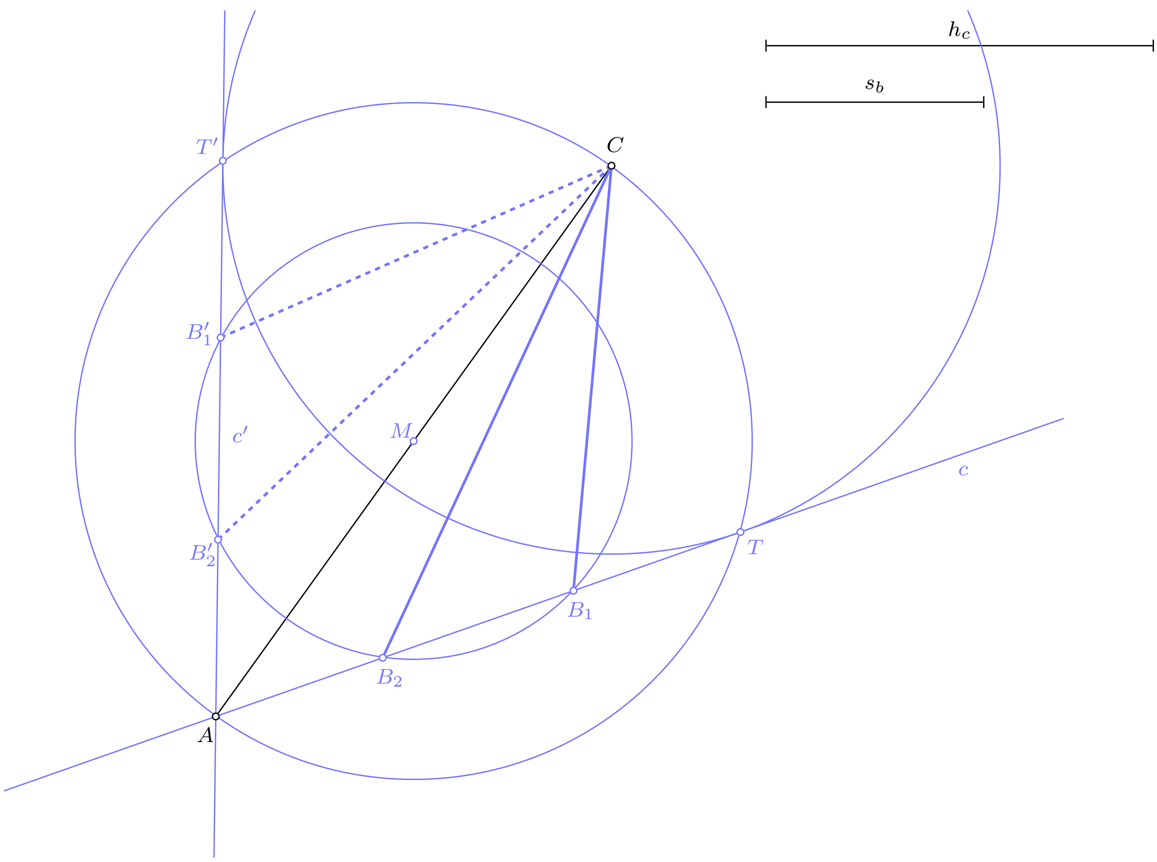
2. Die Schnittpunkte des Thaleskreis über AC mit dem Kreis um C mit Radius h_c sind die Höhenfusspunkte T, T'. **[2 P]**

3. Die Gerade $c = AT$ bzw. $c' = AT'$ ist die der Ecke C gegenüberliegende Seite.

4. Die Schnittpunkte von c und dem Kreis um M mit Radius s_b sind die Ecken B_1, B_2. **[2 P]**

5. Die Schnittpunkte von c' und dem Kreis um M mit Radius s_b sind die Ecken B_1', B_2' der anderen beiden Dreiecke.

Führe die Konstruktion in der untenstehenden Situation aus.

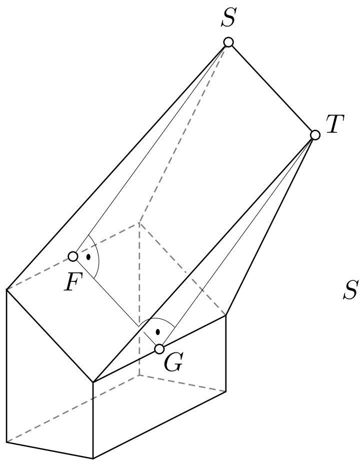


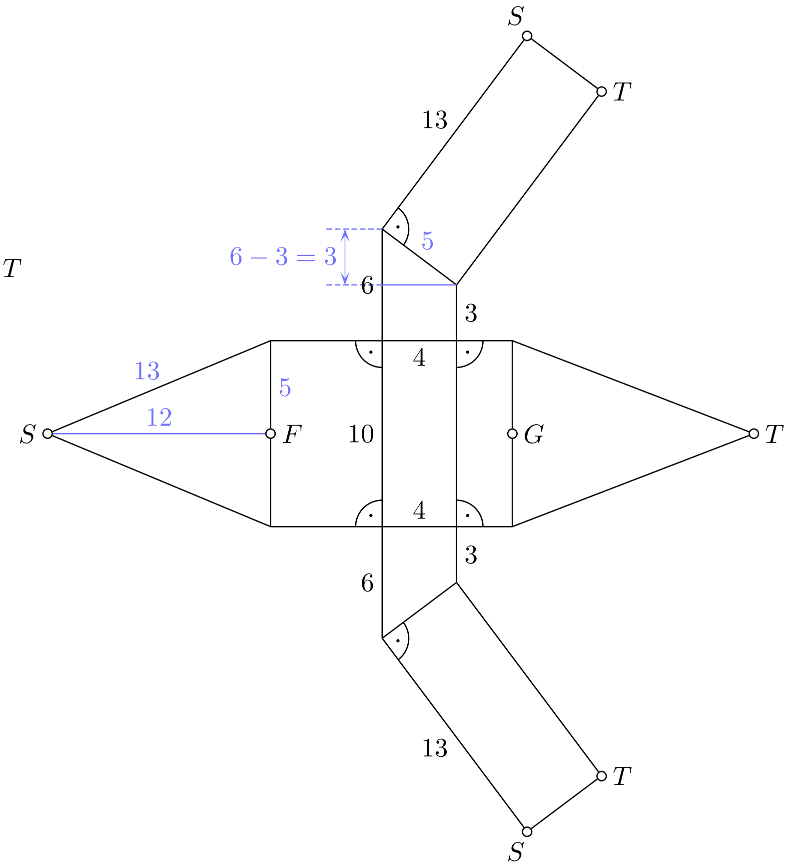
Aufgabe 12 [4P]

Der unten links abgebildete Körper entsteht durch das Falten des Netzes, welches rechts gezeichnet ist. Dabei sind F und G Kantenmitten. Die Längenangaben sind in Zentimeter.

Berechne das Volumen des Körpers.

Beachte dabei, dass $FGTS$ ein Rechteck ist.





Der Sockel ist ein Prisma mit einer trapezförmigen Grundfläche. Das Trapez hat die Mittellinie $\frac{6\,\text{cm}+3\,\text{cm}}{2} = 4.5\,\text{cm}$, die Höhe $4\,\text{cm}$ und daher den Flächeninhalt $4.5\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$. Der Sockel hat folglich das Volumen $V_1 = 10\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm}^2 = 180\,\text{cm}^3$. **[2 P]**

Auf dem Sockel steht ebenfalls ein Prisma. Dessen Grundfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $10\,\text{cm}$ und der Schenkellänge $13\,\text{cm}$. Die Höhe hat daher die Länge $SF = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{cm}$. Also hat das Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60\,\text{cm}^2$. **[1 P]**

Die Höhe des Prismas ist die schräge Seite des Trapezes. Gemäss den Angaben im Netz beträgt dessen Länge $ST = \sqrt{(6-3)^2 + 4^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$. Also hat das aufgesetzte Prisma das Volumen $V_2 = 60 \cdot 5 = 300\,\text{cm}^3$. **[1 P]**

Der Körper hat das Volumen $180\,\text{cm}^3 + 300\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{480\,\text{cm}^3}}$.