Mathematik
Aufnahmeprüfung 2022

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Die Prüfung ist so konzipiert, dass bei allen Aufgaben für deren korrekte Lösung *kein* Taschenrechner erforderlich ist. Die Benutzung des Taschenrechners hat weder Vor- noch Nachteile.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	4	3	4	4	4	3	4	4	4	4	46

Aufgabe 1 [4P]

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $12x - (12 - x) + (-5x - (2 - x + y))$

Schreibe vollständig gekürzt:

(b) $\dfrac{12ab^3}{5c} \cdot \dfrac{10b}{3a^2c}$

Vereinfache so weit wie möglich:

(c) $\dfrac{t^2}{3} - \dfrac{t \cdot (1-t)}{6} + t$

Berechne in Sekunden:

(d) $(1\,\mathrm{h} + 3\,\mathrm{min} + 2\,\mathrm{s}) - (1\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{s}) =$ ______ s

(a)

$$\begin{aligned} 12x - (12 - x) + (-5x - (2 - x + y)) &= 12x - 12 + x + (-5x - 2 + x - y) \\ &= 12x - 12 + x - 5x - 2 + x - y \\ &= \underline{\underline{9x - y - 14}} \end{aligned}$$

[1 P]

(b)

$$\begin{aligned} \frac{12ab^3}{5c} \cdot \frac{10b}{3a^2c} &= \frac{12ab^3 \cdot 10b}{5c \cdot 3a^2c} \\ &= \underline{\underline{\frac{8b^4}{ac^2}}} \end{aligned}$$

[1 P]

(c)

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{3} - \frac{t \cdot (1-t)}{6} + t &= \frac{2t^2}{6} - \frac{t - t^2}{6} + \frac{6t}{6} \\ &= \frac{2t^2 - t + t^2 + 6t}{6} \\ &= \underline{\underline{\frac{3t^2 + 5t}{6}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{6}t}} \end{aligned}$$

[1 P]

(d)

$$\begin{aligned} (1\,\mathrm{h} + 3\,\mathrm{min} + 2\,\mathrm{s}) - (1\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{s}) &= 1\,\mathrm{h} + 3\,\mathrm{min} + 2\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{h} - 2\,\mathrm{min} - 4\,\mathrm{s} \\ &= 1\,\mathrm{min} + 2\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s} \\ &= \underline{\underline{58\,\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

[1 P]

Aufgabe 2 [4P]

(a) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten n auf:

$4n \cdot (3-5n) = 2 \cdot \big(1 - n \cdot (10n-7)\big)$

(b) Löse folgende Gleichung nach dem Winkel α auf:

$2 \cdot (\alpha - 45^\circ) - (\alpha - 180^\circ) - \dfrac{90^\circ - \alpha}{2} \;=\; \dfrac{\alpha}{2} + (60^\circ - 4\alpha)$

(a)

$$\begin{aligned}
4n \cdot (3-5n) &= 2 \cdot \big(1 - n \cdot (10n-7)\big) \\
12n - 20n^2 &= 2 \cdot (1 - 10n^2 + 7n) \\
12n - 20n^2 &= 2 - 20n^2 + 14n && \Big| +20n^2 - 14n \\
-2n &= 2 && \Big| \div(-2) \\
n &= \underline{\underline{-1}}
\end{aligned}$$

[2 P]

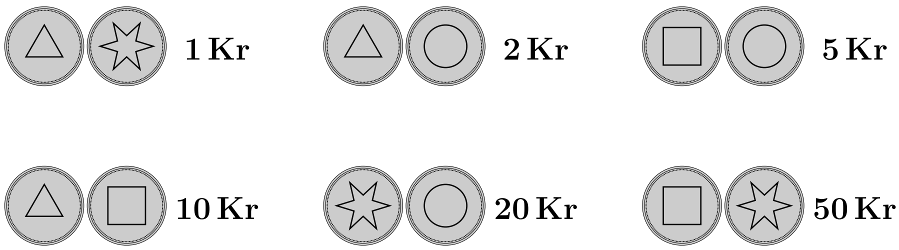
(b)

$$\begin{aligned}
2 \cdot (\alpha - 45^\circ) - (\alpha - 180^\circ) - \frac{90^\circ - \alpha}{2} &= \frac{\alpha}{2} + (60^\circ - 4\alpha) \\
2\alpha - 90^\circ - \alpha + 180^\circ - 45^\circ + \frac{\alpha}{2} &= \frac{\alpha}{2} + 60^\circ - 4\alpha && \Big| -\frac{\alpha}{2} \\
\alpha + 45^\circ &= 60^\circ - 4\alpha && \Big| +4\alpha - 45^\circ \\
5\alpha &= 15^\circ && \Big| \div 5 \\
\alpha &= \underline{\underline{3^\circ}}
\end{aligned}$$

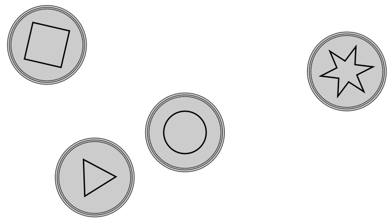
[2 P]

Aufgabe 3 [4P]

Im Sonderland wird mit Kreuzer (Kr) bezahlt. Es gibt 6 verschiedene Münzen mit den Werten von 1 Kr, 2 Kr, 5 Kr, sowie 10 Kr, 20 Kr und 50 Kr. Die Abbildung zeigt diese 6 Münzen mit ihrer Vorder- und Rückseite sowie ihrem Geldwert.



Ein Sonderländer schüttet den ganzen Inhalt seines Portemonnaies auf einem Tisch aus.

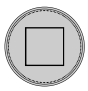
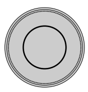


(a) Wie viel Kreuzer liegen *mindestens* auf dem Tisch?

Für jedes der vier Symbole geben wir die Münze mit dem kleinsten Wert an: Dreieck und Stern: 1 Kr, Kreis: 2 Kr und Quadrat: 5 Kr. Somit ergibt sich der kleinste Wert, den der Sonderländer dabei hat, als $1 + 1 + 2 + 5 = \underline{\underline{9\,\text{Kr}}}$. [1 P]

(b) Es soll untersucht werden, welcher Gesamtbetrag auf dem Tisch liegen könnte. Die Münzen könnten beispielsweise insgesamt 55 Kr wert sein, siehe die Tabelle.

Fülle die übrigen Spalten zu den angegebenen Geldwerten aus, sofern dies möglich ist. Wenn ein Geldwert nicht möglich ist, so streiche ihn durch.

	~~50 Kr~~	51 Kr	52 Kr	~~53 Kr~~	54 Kr	Beispiel 55 Kr
		10 Kr	10 Kr		50 Kr	5 Kr
		1 Kr	2 Kr		1 Kr	10 Kr
		20 Kr	20 Kr		2 Kr	20 Kr
		20 Kr	20 Kr		1 Kr	20 Kr

[3 P]

Die nebenstehende Tabelle zeigt die möglichen Werte der einzelnen Münzen.

Quadrat	5	10	50
Dreieck	1	2	10
Kreis	2	5	20
Stern	1	20	50

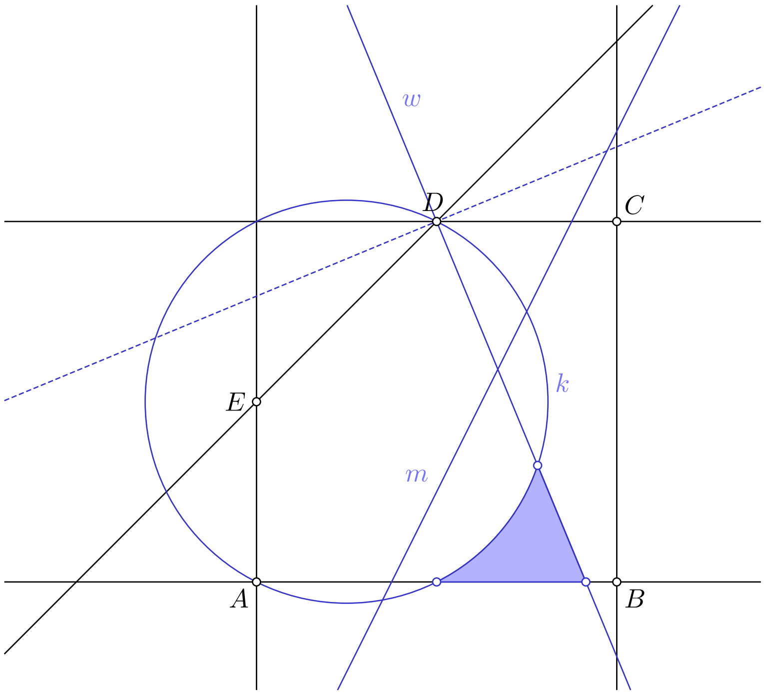
Um Beträge im Bereich 50 . . . 54 zu erhalten, muss entweder eine Münze den Wert 50 haben und die anderen drei Münzen lauter kleine Werte (wie bei 54), oder die 50 entsteht aus $10 + 20 + 20$, wobei dann nur eine einzige weitere Münze übrig bleibt (wie bei 51,52). Nicht möglich sind aus diesem Grund 50 und 53.

Aufgabe 4 [3P]

Schraffiere im Innern des 5-Ecks $ABCDE$ das Gebiet aller Punkte, welche gleichzeitig die drei folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Sie sind vom Punkt E weiter entfernt als vom Punkt B.
- Die Strecke DA wird unter einem spitzen Winkel gesehen.
- Sie liegen näher bei der Geraden ED als bei der Geraden CD.

Führe die Konstruktionen direkt auf diesem Blatt in der untenstehenden Figur aus.



Die Punkte, welche gleich weit von E und B entfernt sind liegen auf der Mittelsenkrechten m von EB. Die Punkte, von denen aus die Strecke DA unter einem rechten Winkel gesehen werden, liegen auf dem Thaleskreis k über der Strecke AD. Die Punkte, welche den gleichen Abstand zur Geraden ED wie zur Gerade CD haben sind die beiden Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden, wobei hier nur die Winkelhalbierende w in Betracht gezogen werden muss.

Die Punkte, welche weiter von E als von B entfernt sind liegen rechts von m.

Die Punkte, von denen aus man AD unter einem spitzen Winkel sieht liegen ausserhalb von k. **[2 P]**

Schliesslich liegen die Punkte, deren Abstand zu ED kleiner als zu CD ist, links von w.

Das Gebiet aller Punkte im Innern von $ABCDE$, welche die drei Bedingungen erfüllen (also rechts von m, ausserhalb von k und links von w liegen) ist in der obigen Figur schraffiert. **[1 P]**

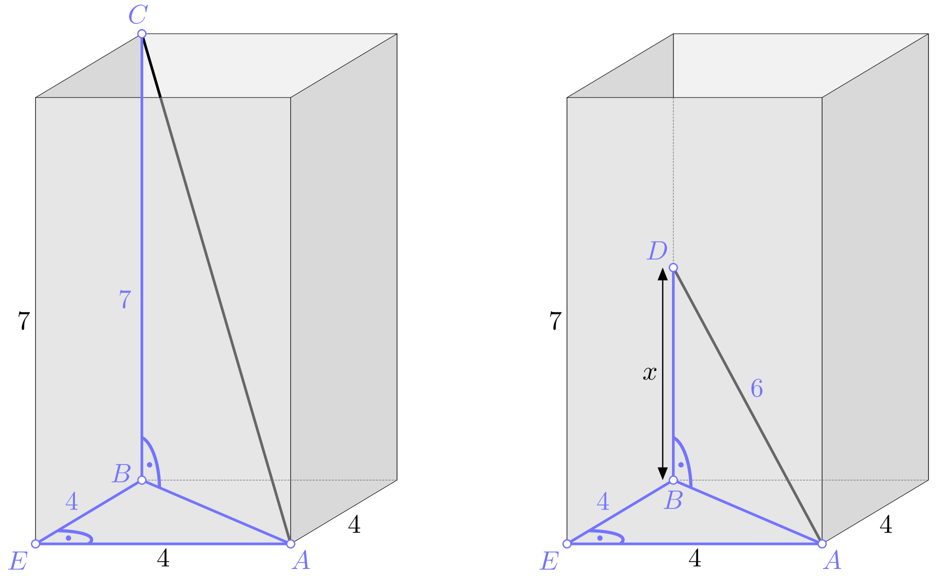
Aufgabe 5 [4P]

Ein oben offener Plexiglasquader hat eine quadratische Grundfläche der Grösse $4\,\mathrm{dm} \times 4\,\mathrm{dm}$ und die Höhe $7\,\mathrm{dm}$.

(a) Berechne die Länge der Raumdiagonale (siehe die linke Figur).

(b) Eine dünne Metallstange der Länge $6\,\mathrm{dm}$ wird in eine Ecke des Quaders gestellt und an der gegenüberliegenden, senkrechten Kante angelehnt (siehe die rechte Figur).

Berechne die Höhe x des oberen Endes der Stange über der Grundfläche des Quaders.



(a) Das Dreieck ABE ist gleichschenklig-rechtwinklig mit den Kathetenlängen 4. Nach dem Satz von Pythagoras ist $AB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$.

Die Raumdiagonale AC ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Kathete $BC = 7$. Wieder nach Pythagoras ist $AC^2 = 7^2 + AB^2 = 49 + 32 = 81$.

Also misst die Raumdiagonale $\underline{\underline{AC}} = \sqrt{81}\,\mathrm{dm} = \underline{\underline{9\,\mathrm{dm}}}$ **[2 P]**

(b) Gemäss (a) ist $AB^2 = 32$. Im rechtwinkligen Dreieck ABD mit den Katheten AB, $BD = x$ und der Hypotenuse $AD = 6$ gilt nach dem Satz von Pythagoras $x^2 + AB^2 = 6^2$, also

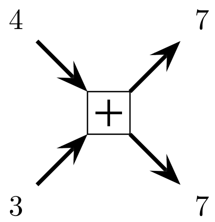
$$x^2 + 32 = 36$$

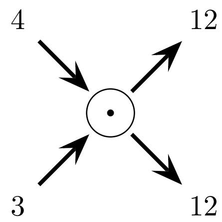
Daraus erhält man $x^2 = 4$, und somit $\underline{\underline{x = 2\,\mathrm{dm}}}$. **[2 P]**

Aufgabe 6 [4P]

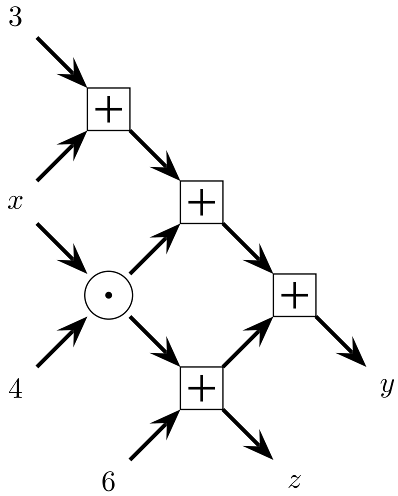
Rechenmeister Reinhard arbeitet mit zwei verschiedenen Rechenelementen. Beide Rechenelemente verwerten zwei Eingaben und liefern an jede Ausgabestelle *dieselbe* Zahl.

Das eine Rechenelement addiert und das andere multipliziert die beiden Eingaben:





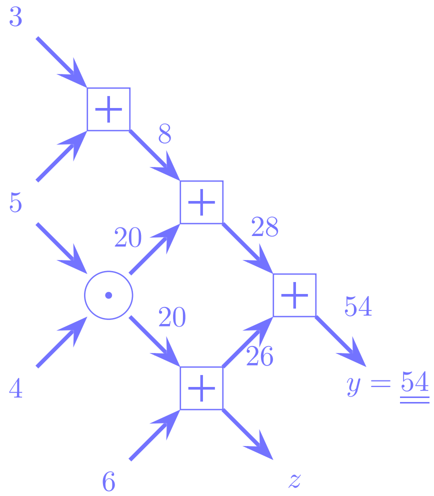
Reinhard hat die folgende Rechenmaschine zusammengebaut. Dabei ist x eine Eingabe und y, z sind Ausgaben.

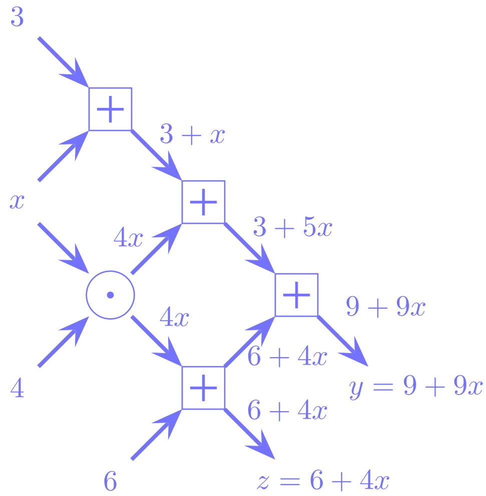


(a) Reinhard wählt die Eingabe $x = 5$. Welche Ausgabe y liefert dann seine Rechenmaschine?

(b) Reinhard möchte, dass die Ausgabe y das 3-fache der Ausgabe z ist. Welche Eingabe x muss er dazu wählen?

(a) Dies kann man direkt im Diagramm ausrechnen, siehe die linke Abbildung.





[2 P]

(b) Bestimme zuerst die Ein- und Ausgaben (siehe die rechte Figur). Man erhält so die Gleichung

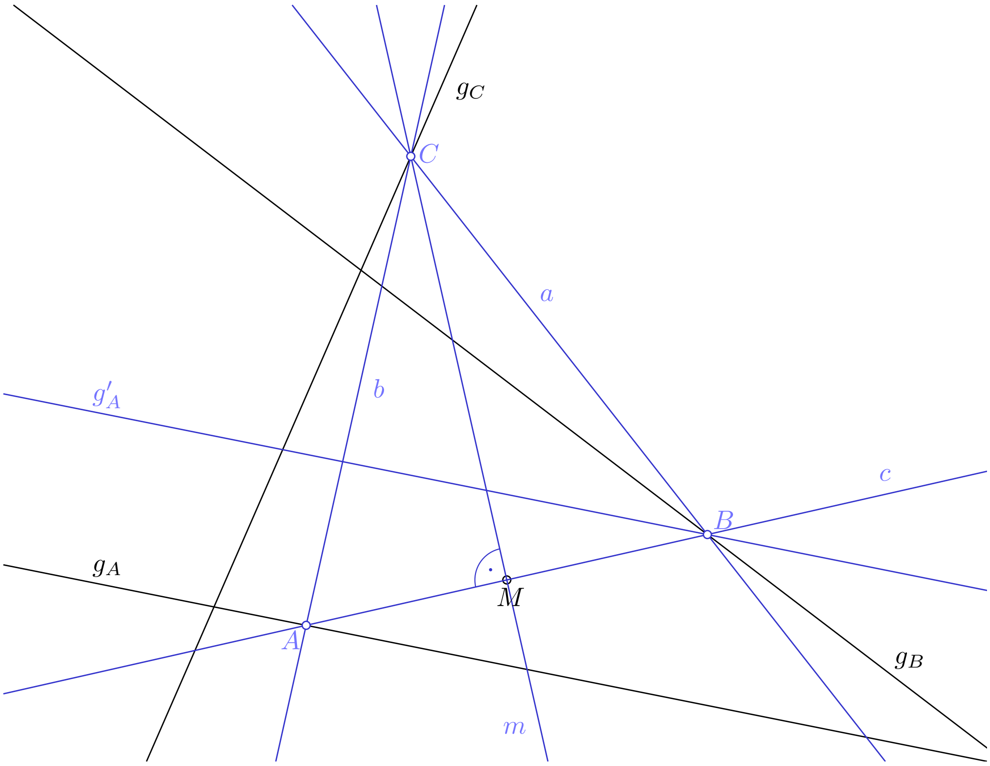
$$\begin{aligned} 3(6+4x) &= 9+9x \\ 18+12x &= 9+9x \quad \mid -9x-18 \\ 3x &= -9 \quad \mid \div 3 \\ x &= \underline{\underline{-3}} \end{aligned}$$

[2 P]

Aufgabe 7 [4P]

Gegeben sind drei Geraden g_A, g_B und g_C sowie ein Punkt M. Konstruiere das Dreieck ABC mit folgenden fünf Eigenschaften:

1. ABC ist gleichschenklig mit $AC = BC$,
2. A liegt auf g_A,
3. M ist die Mitte von AB,
4. B liegt auf g_B,
5. C liegt auf g_C.



Die Punkte A, B liegen punktsymmetrisch bezüglich ihrer Mitte M. Daher liegt B auf der an M gespiegelten Gerade g_A, welche wir mit g'_A bezeichnen. **[1 P]**

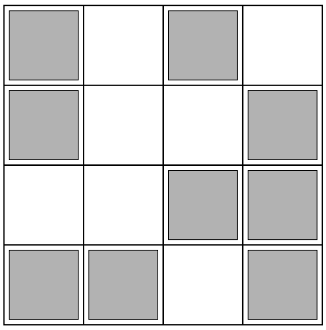
Weil B auf g_B liegen soll, ist B der Schnittpunkt von g'_A und g_B. **[1 P]**

Genauso ist A der Schnittpunkt von g_A mit g'_B, wobei g'_B die an M gespiegelte Gerade g_B ist. **[1 P]**

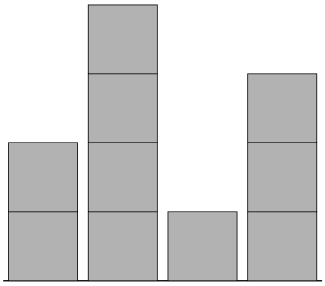
Weil das Dreieck ABC gleichschenklig sein soll, liegt C auf der Mittelsenkrechten m von AB. Daher ist C der Schnittpunkt von m mit g_C. **[1 P]**

Aufgabe 8 [3P]

Lisa hat auf einigen Feldern eines quadratischen Bretts Türme mit Holzwürfeln gebaut. Die linke Figur zeigt die Türme von oben betrachtet. Die rechte Figur zeigt eine Seitenansicht. Man weiss aber nicht, von welcher der vier Seiten her die Türme betrachtet wurden.



Sicht von oben



Eine Seitenansicht

Wie viele Holzwürfel hat Lisa höchstens verwendet?

Von vorne: $3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 21$;

Von rechts: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 22$;

Von hinten: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$;

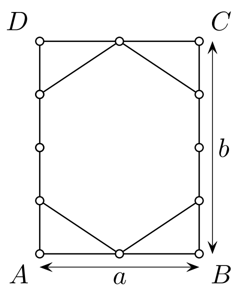
Von links: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 23$.

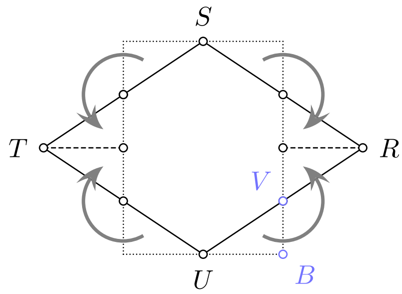
Lisa hat höchstens $\underline{\underline{24}}$ Holzwürfel verwendet.

Aufgabe 9 [4P]

Einem Rechteck $ABCD$ werden die Seiten AB, CD halbiert, und die Seiten BC, DA in vier gleiche Teile geteilt. Die Teilpunkte werden miteinander so verbunden, wie in der linken Figur abgebildet. Nun werden die äusseren Dreiecke abgeschnitten und gemäss der Figur rechts angesetzt. Auf diese Weise entsteht der Rhombus $RSTU$.

Das ursprüngliche Rechteck hat die Seitenlängen $a = AB$ und $b = BC$.





(a) Drücke die Seitenlänge des Rhombus durch a und b aus.

(b) Es sei $b = 16$ cm. Wie gross muss a gewählt werden, damit $RSTU$ ein Quadrat ist?

(c) Es seien $a = 6$ cm und $b = 16$ cm. Berechne den Abstand der parallelen Seiten von $RSTU$.

(a) $s = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{16}} = 2\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{16}} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$. **[1 P]**

(b) Damit der Rhombus ein Quadrat wird, muss das Dreieck UBV ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck sein. Dann gilt

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4}$$

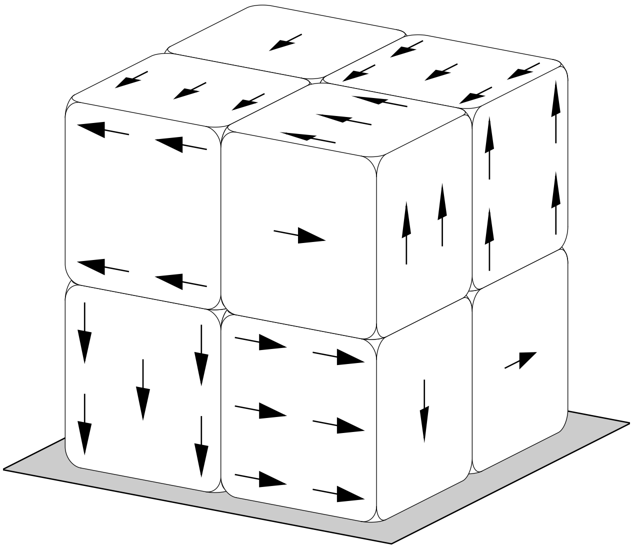
[1 P]

also $a = \frac{b}{2} = \underline{\underline{8\,\text{cm}}}$.

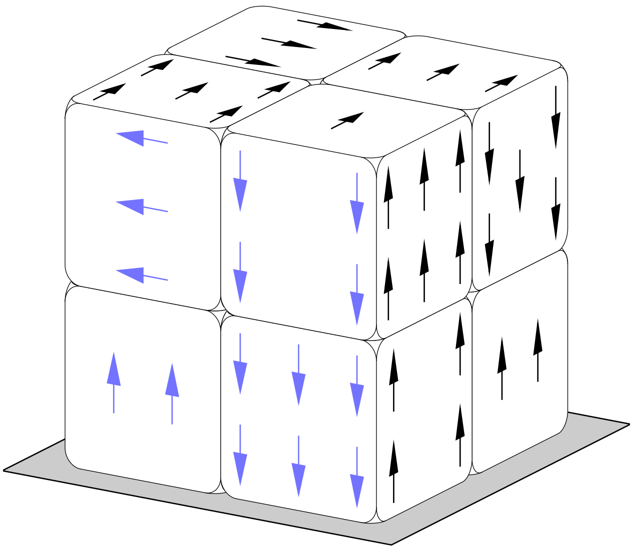
(c) Das Rechteck $ABCD$ hat den Flächeninhalt $6\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} = 96\,\text{cm}^2$.
Gemäss (a) ist die Seitenlänge des Rhombus gleich $s = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2} = 2\sqrt{9 + 16}\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.
Der Rhombus $RSTU$ hat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck $ABCD$. Andererseits ist der Flächeninhalt des Rhombus gleich der Seite s mal dem gesuchten Abstand h zwischen den parallelen Seiten von $RSTU$. **[2 P]**
Somit gilt $h = \frac{96\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}} = \underline{\underline{9.6\,\text{cm}}}$.

Aufgabe 10 [4P]

Acht genau gleiche Würfel, mit Pfeilen auf allen Seitenflächen, werden zu einem Würfelpack zusammengeleimt.

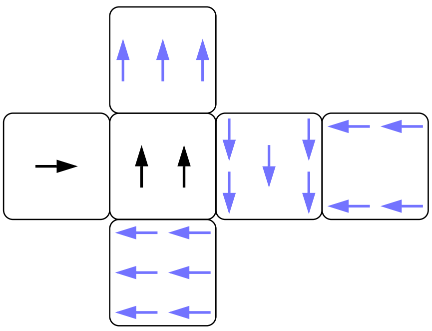


Das Würfelpack wird auf dem Boden stehend um 180° gedreht. Dadurch kommen die Hinterseiten zum Vorschein – allerdings sind auf einer von diesen die Pfeile nicht eingezeichnet.



(a) Obwohl die Pfeile auf einer Seite des Würfelpacks nicht eingezeichnet wurden, kann man das Netz eines einzelnen Würfels zeichnen.

Vervollständige das Netz eines einzelnen Würfels.



[2 P]

(b) Zeichne im gedrehten Würfelpack die Pfeile auf der leeren Vorderseite ein. Beachte, dass dabei die Anzahl und die Richtung der Pfeile wichtig ist. [2 P]

Aufgabe 11 [4P]

Schreibt man die Zahlen $b = 693$ und $c = 5940$ als Produkt von Primfaktoren, so erhält man:

$$b = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \qquad \text{bzw.} \qquad c = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

(a) Schreibe den grössten gemeinsamen Teiler, sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von b und c als Produkt von Primfaktoren.

ggT $= 3 \cdot 3 \cdot 11$,

kgV $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. **[1 P]**

Aus den Primfaktoren der Zahl b wird ein aus drei Zahlen zusammengesetzter «Primzahlschlüssel» gebildet, zum Beispiel:

Dabei darf jeder Primfaktor höchstens so oft vorkommen, wie er in der Primfaktorzerlegung von b vorkommt.

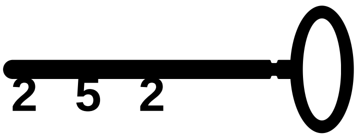
(b) Wie viele verschiedene solche Primzahlschlüssel gibt es mit der Zahl b?

3 kommt doppelt vor: 3 3 7, 3 7 3, 7 3 3, 3 3 11, 3 11 3, 11 3 3.

Alle Faktoren jeweils einmal: 3 7 11, 3 11 7, 7 3 11, 7 11 3, 11 3 7, 11 7 3.

Es gibt insgesamt $\underline{\underline{12}}$ Primzahlschlüssel. **[1 P]**

Nun wird die Zahl c zur Herstellung von Primzahlschlüsseln verwendet, zum Beispiel:



(c) Wie viele verschiedene solche Primzahlschlüssel gibt es bei der Zahl c, wenn eine Primzahl doppelt vorkommen soll?

2 kommt doppelt vor: 2 2 3, 2 3 2, 3 2 2, 2 2 5, 2 5 2, 5 2 2, 2 2 11, 2 11 2, 11 2 2,

3 kommt doppelt vor: 3 3 2, 3 2 3, 2 3 3, 3 3 5, 3 5 3, 5 3 3, 3 3 11, 3 11 3, 11 3 3,

3 kommt dreimal vor: 3 3 3.

Es gibt insgesamt $\underline{\underline{18}}$ bzw. (wenn man den Primzahlschlüssel 3 3 3 mitzählt) $\underline{\underline{19}}$ Primzahlschlüssel. **[2 P]**

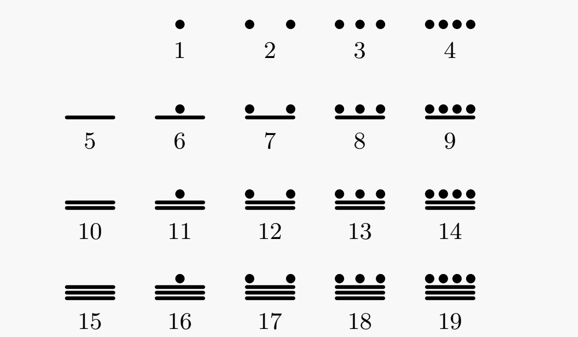
Aufgabe 12 [4P]

Lies den folgenden Artikel sorgfältig durch und beantworte danach die untenstehenden Fragen.

Die früheste Erfindung der Zahl Null

Die Mayas waren eine frühe Hochkultur in der Zeit 3000 v.Chr bis 900 n.Chr. Ihr Siedlungsgebiet lag auf der Halbinsel Yucatán im heutigen Mexiko.

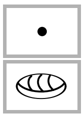
Die Maya-Kultur ist berühmt für ihre astronomischen Beobachtungen und genauen Messungen, sowie für ihre Kalenderrechnung. Sie verwendeten für die Darstellung von Zahlen spezielle Symbole. Dabei wurde ein Punkt • als 1 gewertet und ein Strich —— als 5. Diese Symbole gruppierten sie zu Zeichen, wobei maximal vier Punkte und maximal 3 Striche in einem Zeichen verwendet werden durften. Die Abbildung zeigt die Zeichen für die Zahlen von 1 bis 19.



Die Zahlsymbole der MAYA von 1 bis 19

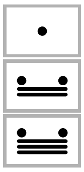
Um grössere Zahlen darzustellen stapelten sie Zeichen übereinander, wobei das unterste Zeichen den ursprünglichen Wert hat, das darübergelegene aber mit 20 multipliziert werden muss und das in der zweiten Position darüber mit 400.

Um die Zahl 20 zu schreiben, benötigten sie daher ein Zeichen für die Zahl Null, die sie in Form einer Muschel darstellten: . So schrieben sie:

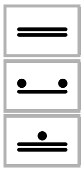


$$\begin{aligned} 20 \times 1 &= 20 \\ &= 0 \\ \hline & \ 20 \end{aligned}$$

Dies ist die erste bezeugte Verwendung eines Zeichens, um die Zahl Null darzustellen. Hier noch zwei Beispiele von MAYA-Zahlen:



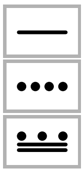
$$\begin{aligned} 1 \times 400 &= 400 \\ 12 \times 20 &= 240 \\ &= 17 \\ \hline & \ 657 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 10 \times 400 &= 4000 \\ 7 \times 20 &= 140 \\ &= 11 \\ \hline & \ 4151 \end{aligned}$$

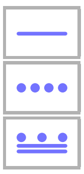
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt einer 2.4 m hohen und 4 Tonnen schweren Steinplatte der Maya, die 1986 in Mexiko gefunden wurde. Sie stammt aus der klassischen Zeit (150-450). Darauf finden sich Zahlzeichen rechts vom Kopf.

(a) Um welche Zahl handelt es sich bei der folgenden MAYA-Zahl?



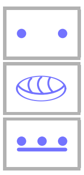
(b) Wie hatten die MAYA die Zahl 808 geschrieben?

(a) Es sind der Reihe nach, von oben nach unten gelesen, die Ziffern 5, 4 und 13. Die MAYA-Zahl lautet also 2093.



$$\begin{aligned} 5 \times 400 &= 2000 \\ 4 \times 20 &= 80 \\ &= 13 \\ \hline & \ 2093 \end{aligned}$$

[2 P]

(b) Die Zahl 808 schrieben die Maya als  .

Begründung: Wegen $2 \cdot 400 = 800$ ist $808 = 2 \cdot 400 + 0 \cdot 20 + 8$.

[2 P]