Lösungen FMS -Aufnahmeprüfung 2014 Mathematik

1. Löse die Gleichungen nach x auf:

a) $(x - 5)^2 = (x + 6)\cdot(x - 2) + 2$

$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2x + 6x - 12 + 2$

$35 = 14x$

$\frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2.5 = x$

b) $\frac{48-4x}{21} - \frac{3}{2}x = \frac{9}{35}$ $\quad |\cdot 210$

$480 - 40x - 315x = 54$

$426 = 355x$

$\frac{426}{355} = \frac{6}{5} = 1.2 = x$

2. Vereinfache die folgenden Terme.

a) Kürze:

$$\frac{2x^2y^2 - 6xy^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\frac{2xy^2 \cdot (x-3)}{(x-1)\cdot(x-3)} = \frac{2xy^2}{x-1}$$

b) Schreibe das Ergebnis ohne Klammer:

$$2\cdot(2n - 3m)^2 - (n - 2m)\cdot(8n - 9m)$$

$= 2\cdot(4n^2 - 12mn + 9m^2) - (8n^2 - 9mn - 16mn + 18m^2)$

$= 8n^2 - 24mn + 18m^2 - 8n^2 + 25mn - 18m^2 = mn$

c) Fasse so weit als möglich zusammen:

$$16a^{-2} : (2a)^5$$

$= 16a^{-2} : (32a^5) = \frac{1}{2}\cdot a^{-2-5} = \frac{1}{2}\cdot a^{-7} = \frac{1}{2a^7}$

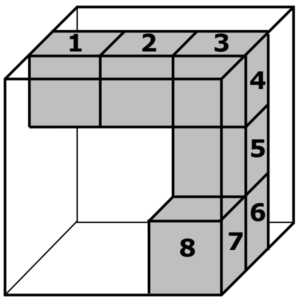
3. a) Ein Erwachsener sollte pro Tag höchstens 50 g Zucker zu sich nehmen.
100 cm³ Cola enthalten 10.6 g Zucker.
Wie viele Milliliter Cola dürfte ein Erwachsener also täglich höchstens trinken?

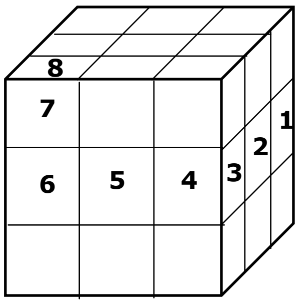
$$\frac{100\ cm^3 \cdot 50\ g}{10.6\ g} = 471.7\ \text{cm}^3 \triangleq 471.7\ \text{ml} \approx 472\ \text{ml}$$

b) Ein Würfelzucker wiegt 3 g.
Wie viele Würfelzucker entsprechen der Zuckermenge in 5 dl Cola?

5dl $\triangleq$ 500 cm³ $\Rightarrow$ In 5 dl sind 5·10.6 = 53 g Zucker $\triangleq 17\frac{2}{3}$ Stück Würfelzucker

4.





5.

Jahr	1984	2014	Veränderung
Schaffhausen ab:	9:03	9:18	
Bern an:	11:13	10:58	
Fahrpreis:	35.– SFr.	60.– SFr.	+ 25.– SFr.
Fahrzeit:	130 Minuten	100 Minuten	– 30 Minuten

a) Um wie viele Prozente hat sich der heutige Fahrpreis gegenüber 1984 verteuert?

$$\frac{25.-}{35.-} \cdot 100\% = 71.4\%$$

b) Um wie viele Prozente ist die heutige Fahrzeit kürzer gegenüber 1984?

$$\frac{30\ \text{min}}{130\ \text{min}} \cdot 100\% = 23.1\%$$

6. Ein Getränkeharass mit 7 leeren und 8 vollen Glasflaschen wiegt 10.3 kg. Dabei ist eine volle Flasche 500 Gramm schwerer als eine leere Flasche. Der leere Harass ist gleich schwer wie drei leere Flaschen.
Wie viel wiegt eine leere Flasche?
(Die Aufgabe muss mit einer Gleichung gelöst werden!)

Harass + 7 leere + 8 volle Flaschen = 10‘300 g

$3x + 7x + 8\cdot(x + 500) = 10'300$

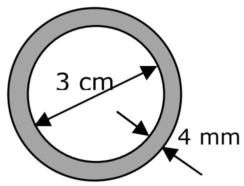
$10x + 8x + 4000 = 10'300$

$18x = 6300$

$x = 350$ g = 0.35 kg

Eine leere Flasche wiegt 350 g bzw. 0.35 kg.

7. a) Für eine Wasserleitung verwendet man ein 1.2m langes Eisenrohr. Der Innendurchmesser des Rohres ist 3 cm und seine Wandstärke 4 mm.
Wie viele cm³ Eisen werden für ein solches Rohr gebraucht?



Querschnitt des Eisenrohres

Rohr ≙ Hohlzylinder mit

äusserer Radius = 1.9 cm, Innenradius = 1.5 cm

$\Rightarrow \; V = \pi\cdot 1.9^2\cdot 120 - \pi\cdot 1.5^2\cdot 120 = 512.7 \text{ cm}^3$

b) Mit einem halben Liter dieser Farbe kann man eine 1 m² = 10‘000 cm² grosse Fläche bestreichen.
Wie viele Liter dieser Farbe werden benötigt, um die Aussenfläche dieses Rohres zu bestreichen?

Aussenfläche $M = 2\pi\cdot 1.9\cdot 120 = 1432.57 \text{ cm}^2$

Farbe: $\dfrac{\frac{1}{2}\, Liter \cdot 1432.57\, cm^2}{10000\, cm^2}$ = 0.072 Liter = 0.72 dl.

8. In Wengen findet alljährlich am Lauberhorn ein Abfahrts-Skirennen statt.
Im Jahr 2012 benötigte der Sieger Beat Feuz für die 4415 Meter lange Strecke
2 Minuten und 35.31 Sekunden.

a) Berechne seine Durchschnittsgeschwindigkeit und gib das Ergebnis in km/h auf zwei Dezimalstellen genau an.

$$v = \frac{4415\ m}{155.31\ s} = 28.43 \text{ m/s} = 102.34 \text{ km/h}$$

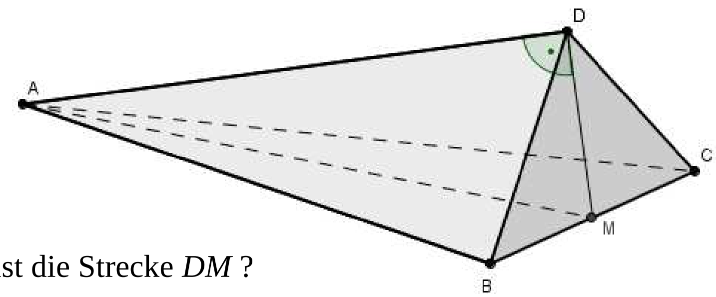
b) In diesem Jahr musste aufgrund des schlechten Wetters die Strecke erheblich verkürzt werden und betrug daher nur 2682 Meter. Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Siegers war aber um 1.86 km/h höher als jene vor zwei Jahren.
Berechne die diesjährige Laufzeit des Siegers auf Hundertstelsekunden genau.

$$v = 102.34 + 1.86 = 104.20 \text{ km/h} = 28.94 \text{ m/s}$$

$$t = \frac{2682\ m}{28.94\ m/s} = 92.66 \text{ s} = 1 \text{ Minute } 32.66 \text{ Sekunden.}$$

9. Beim abgebildeten Körper *ABCD* sind die beiden Seitenflächen *ABC* und *BCD* gleichschenklige Dreiecke. Die Seitenlängen *AB* und *AC* messen $AB = AC = 61$ dm.
Die Seiten *BD* und *CD* sind gleich lang. *M* ist die Seitenmitte von *BC*.
Weiter messen die Kanten $AD = 57.6$ dm und $BC = 22$ dm.

Der Winkel $\sphericalangle ADM$ ist ein rechter Winkel.



a) Wie lang ist die Strecke *DM* ?

$$BM = ½BC = 11 \text{ cm}, \quad AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60 \text{ dm}$$

$$DM = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{60^2 - 57.6^2} = 16.8 \text{ dm}$$

b) Der Körper ist eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche *BCD* und der Höhe $h = AD$.

$$G = A_{\Delta BCD} = ½ \cdot BC \cdot DM = ½ \cdot 22 \cdot 16.8 = 184.8 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 184.8 \cdot 57.6 = 3548.16 \text{ dm}^3$$

10. Die Bevölkerungszahl der Schweiz ist in den vergangenen zwanzig Jahren nahezu linear angestiegen von 6‘907‘960 Einwohner am Ende des Jahres 1992 auf 8‘039‘060 am Ende des Jahres 2012.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8'039'060 - 6'907'960}{2012 - 1992} = \frac{1'131'100}{20} = 56'555 \quad \text{(Einwohner pro Jahr)}$$

b) Im Laufe welchen Jahres würde die Schweiz bei gleichbleibendem Wachstum die 10-Millionen-Einwohner-Grenze überschreiten?

$8'039'060 + x \cdot 56'555 = 10'000'000 \quad \Rightarrow \quad x = 34.67$ Jahre

$\Rightarrow$ Im Laufe des Jahres 2047

11.

Anlagekategorie	**Obligationen**	**Aktien**	**Immobilien**
Anteil am Gesamtvermögen	50%	30%	20%
Ertrag / Wertzunahme	2%	9%	4.5%

a) Wie hoch ist die prozentuale Wertzunahme des Gesamtvermögens ?

Zunahme: $2\% \cdot 0.5 + 9\% \cdot 0.3 + 4.5\% \cdot 0.2 = 4.6\%$

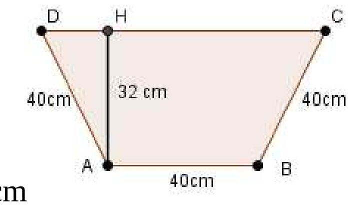
b) Um allen ihren Verpflichtungen nachzukommen, benötigt die Kasse einen Ertrag von 5% auf dem Gesamtvermögen.
Welche Wertsteigerung hätte man mit den Obligationen mindestens erzielen müssen, um dieses Ergebnis zu erreichen?

$x\,\% \cdot 0.5 + 9\,\% \cdot 0.3 + 4.5\,\% \cdot 0.2 = 5\%$

$\Rightarrow x = 2.8\%$

12. In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ messen drei Seiten $AB = AD = BC = 40$ cm, die Höhe des Trapezes ist x cm lang.

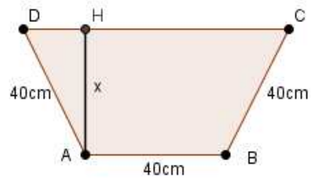
a) Welchen Flächeninhalt hat das Trapez, wenn seine Höhe $x = 32$ cm lang ist?



$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 24$ cm , $CD = AB + 2 \cdot DH = 88$cm

$A_{Trapez} = ½ \cdot (AB + CD) \cdot AH = ½ \cdot (40 + 88) \cdot 32 = 2048$ cm²

b) Drücke den Flächeninhalt des Trapezes allgemein durch einen Term in x aus.



$DH = \sqrt{40^2 - x^2}$, $CD = AB + 2 \cdot DH = 40 + 2 \cdot \sqrt{40^2 - x^2}$

$A_{Trapez} = ½ \cdot (AB + CD) \cdot AH = ½ \cdot (40 + 40 + 2 \cdot \sqrt{40^2 - x^2}) \cdot x$

$$A(x) = (40 + \sqrt{40^2 - x^2}) \cdot x.$$